3 Trigonometría

EJERCICIOS PROPUESTOS

1 y 2. Ejercicios resueltos.

3. Expresa en radianes las siguientes medidas angulares.

a) 30º

b) 60º

c) 200º

d) 330º

a) $30^\circ = \dfrac{30^\circ \pi}{180^\circ} = \dfrac{\pi}{6}$ rad

b) $60^\circ = \dfrac{60^\circ \pi}{180^\circ} = \dfrac{\pi}{3}$ rad

c) $200^\circ = \dfrac{200^\circ \pi}{180^\circ} = \dfrac{10\pi}{9}$ rad

d) $330^\circ = \dfrac{330^\circ \pi}{180^\circ} = \dfrac{11\pi}{6}$ rad

4. Halla la medida en grados de los siguientes ángulos.

a) $\dfrac{7\pi}{3}$ rad

b) $\dfrac{3\pi}{2}$ rad

c) 4 rad

d) 4π rad

a) $\dfrac{7\pi}{3}$ rad $= \dfrac{7\pi \cdot 180^\circ}{3\pi} = 420^\circ$

b) $\dfrac{3\pi}{2}$ rad $= \dfrac{3\pi \cdot 180^\circ}{2\pi} = 270^\circ$

c) 4 rad $= \dfrac{4 \cdot 180^\circ}{\pi} = 229^\circ\ 11'$

d) 4π rad $= \dfrac{4\pi \cdot 180^\circ}{\pi} = 720^\circ$

5. Determina las razones trigonométricas de los ángulos de un triángulo cuyos lados miden 6, 8 y 10 cm, respectivamente.

Se trata de un triángulo rectángulo, pues verifica el teorema de Pitágoras: $10^2 = 6^2 + 8^2$

$\text{sen}\ \hat{A} = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$ $\quad \cos \hat{A} = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}$ $\quad \text{tg}\ \hat{A} = \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4}$

$\text{sen}\ \hat{B} = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}$ $\quad \cos \hat{B} = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$ $\quad \text{tg}\ \hat{B} = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3}$

6. **Calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudos de estos triángulos.**

a) $\hat{A} = 90º$, $b = 10$ cm, $c = 12$ cm **b)** $\hat{B} = 90º$, $b = 15$ cm, $c = 12$ cm **c)** $\hat{C} = 90º$, $b = 12$ cm, $c = 20$ cm

a) $a = \sqrt{10^2 + 12^2} = \sqrt{244} = 2\sqrt{61}$ cm

$\operatorname{sen}\hat{B} = \frac{b}{a} = \frac{10}{2\sqrt{61}} = \frac{5\sqrt{61}}{61}$ $\cos\hat{B} = \frac{c}{a} = \frac{12}{2\sqrt{61}} = \frac{6\sqrt{61}}{61}$ $\operatorname{tg}\hat{B} = \frac{b}{c} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$

$\operatorname{sen}\hat{C} = \frac{c}{a} = \frac{12}{2\sqrt{61}} = \frac{6\sqrt{61}}{61}$ $\cos\hat{C} = \frac{b}{a} = \frac{10}{2\sqrt{61}} = \frac{5\sqrt{61}}{61}$ $\operatorname{tg}\hat{C} = \frac{c}{b} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$

b) $a = \sqrt{15^2 - 12^2} = \sqrt{81} = 9$ cm

$\operatorname{sen}\hat{A} = \frac{a}{b} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$ $\cos\hat{A} = \frac{c}{b} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$ $\operatorname{tg}\hat{A} = \frac{a}{c} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

$\operatorname{sen}\hat{C} = \frac{c}{b} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$ $\cos\hat{C} = \frac{a}{b} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$ $\operatorname{tg}\hat{C} = \frac{c}{a} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$

c) $a = \sqrt{20^2 - 12^2} = \sqrt{256} = 16$ cm

$\operatorname{sen}\hat{A} = \frac{a}{c} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$ $\cos\hat{A} = \frac{b}{c} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$ $\operatorname{tg}\hat{A} = \frac{a}{b} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$

$\operatorname{sen}\hat{B} = \frac{b}{c} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$ $\cos\hat{B} = \frac{a}{c} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$ $\operatorname{tg}\hat{B} = \frac{b}{a} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$

7. **Calcula las razones inversas del ángulo menor en el triángulo rectángulo cuyos catetos midan 5 y 10 cm.**

Hipotenusa: $a = \sqrt{5^2 + 10^2} = 5\sqrt{5}$ cm. El ángulo de menor amplitud es el opuesto al cateto menor, por tanto:

$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$ $\sec\alpha = \frac{5\sqrt{5}}{10} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{10}{5} = 2$

8. **Ejercicio resuelto.**

9. **Halla los ángulos reducidos y las razones trigonométricas de estos ángulos.**

a) 3990º **b)** 9π **c)** 25200º **d)** $\frac{121\pi}{4}$

a) Se calcula el ángulo reducido: $3990º : 360º = 11{,}08\overset{\frown}{3}$ y $0{,}08\overset{\frown}{3} \cdot 360º = 30º$

$\operatorname{sen} 3990º = \operatorname{sen} 30º = \frac{1}{2}$ $\cos 3990º = \cos 30º = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\operatorname{tg} 3990º = \operatorname{tg} 30º = \frac{\sqrt{3}}{3}$

b) Se calcula el ángulo reducido: $9\pi : 2\pi = 4{,}5$ rad y $0{,}5 \cdot 2\pi = \pi$ rad

$\operatorname{sen} 9\pi = \operatorname{sen}\pi = 0$ $\cos 9\pi = \cos\pi = -1$ $\operatorname{tg} 9\pi = \operatorname{tg}\pi = 0$

c) Se calcula el ángulo reducido: 25 200º : 360º = 70 y 0 · 360º = 0º

$\operatorname{sen} 25\,200º = \operatorname{sen} 0º = 0$ $\cos 25\,200º = \cos 0º = 1$ $\operatorname{tg} 25\,200º = \operatorname{tg} 0º = 0$

d) Se calcula el ángulo reducido: $\frac{121\pi}{4} : 2\pi = 15{,}125$ rad y $0{,}125 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{4}$ rad

$\operatorname{sen}\frac{121\pi}{4} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\cos\frac{121\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\operatorname{tg}\frac{121\pi}{4} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$

10. Halla el signo de todas las razones trigonométricas de:

a) 120º **c)** 256º **e)** 315º

b) –70º **d)** 800º **f)** –460º

α	120º	–70º	256º	800º	315º	–460º
Cuadrante	II	IV	III	I	IV	III
sen α y cosec α	+	–	–	+	–	–
cos α y sec α	–	+	–	+	+	–
tg α y cotg α	–	–	+	+	–	+

11. Para los siguientes ángulos, indica el signo de todas sus razones trigonométricas.

a) $\frac{3\pi}{4}$ **c)** $\frac{4\pi}{3}$ **e)** $-\frac{9\pi}{4}$

b) $\frac{11\pi}{3}$ **d)** $-\frac{7\pi}{6}$ **f)** $-\frac{5\pi}{3}$

α	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{9\pi}{4}$	$-\frac{5\pi}{3}$
Cuadrante	II	IV	III	II	IV	I
sen α y cosec α	+	–	–	+	–	+
cos α y sec α	–	+	–	–	+	+
tg α y cotg α	–	–	+	–	–	+

12 y 13. Ejercicios resueltos.

14. Calcula el valor de las siguientes razones trigonométricas reduciéndolas al primer cuadrante.

a) sen 150º **d)** tg 330º **g)** sen 240º

b) cos 225º **e)** cosec 135º **h)** cotg 300º

c) sen 840º **f)** tg 1800º **i)** sec 2295º

a) $\text{sen } 150^\circ = \text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}$

d) $\text{tg } 330^\circ = -\text{tg } 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

g) $\text{sen } 240^\circ = -\text{ sen } 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos 225^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $\text{cosec } 135^\circ = \frac{1}{\text{sen}\, 45^\circ} = \sqrt{2}$

h) $\text{cotg } 300^\circ = -\frac{1}{\text{tg } 60^\circ} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

c) $\text{sen } 840^\circ = \text{sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

f) $\text{tg } 1800^\circ = \text{tg } 0^\circ = 0$

i) $\sec 2295^\circ = -\frac{1}{\cos 45^\circ} = -\sqrt{2}$

15. Calcula, en función de *h*, sen 303º sabiendo que cos 33º = *h*.

$\text{sen } 303^\circ = -\text{sen } 57^\circ = -\text{sen } (90^\circ - 33^\circ) = -\cos 33^\circ = -h$

16. Calcula el valor exacto de:

a) sen $\frac{3\pi}{4}$ **b)** sen $\frac{11\pi}{6}$ **c)** sen $\frac{4\pi}{3}$ **d)** sen $\frac{5\pi}{6}$

a) $\text{sen}\,\frac{3\pi}{4} = \text{sen}\,\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\text{sen}\,\frac{11\pi}{6} = -\text{sen}\,\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

c) $\text{sen}\,\frac{4\pi}{3} = -\text{sen}\,\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\text{sen}\,\frac{5\pi}{6} = \text{sen}\,\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

17. Ejercicio interactivo.

18 y 19. Ejercicios resueltos.

20. Calcula las restantes razones de α sabiendo que:

a) La cotangente de un ángulo $\alpha < 90º$ vale $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

b) $\sec\alpha = –5$ y $90º < \alpha < 180º$

c) $\text{cosec}\,\alpha = –2$ y $\alpha \in \text{III}$

a) Al ser un ángulo del primer cuadrante, todas las razones son positivas. Tenemos:

$$\text{cotg}\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$1 + \text{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha \Rightarrow \sec\alpha = \sqrt{1+\text{tg}^2\alpha} = \sqrt{1+3} = 2 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \cos\alpha\,\text{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{cosec}\,\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

b) Al ser un ángulo del segundo cuadrante, el seno y la cosecante son positivos y el resto de razones son negativas. Tenemos:

$$\sec\alpha = –5 \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{5}$$

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{1}{25}} = \frac{\sqrt{24}}{5} = \frac{2\sqrt{6}}{5} \Rightarrow \text{cosec}\,\alpha = \frac{5}{2\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{12}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = –2\sqrt{6} \Rightarrow \text{cotg}\,\alpha = -\frac{1}{2\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{12}$$

c) Al ser un ángulo del tercer cuadrante, el seno, coseno, cosecante y secante son negativas, y el resto de razones, positivas. Tenemos:

$$\text{cosec}\,\alpha = –2 \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = -\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{1}{4}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sec\alpha = -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \text{cotg}\,\alpha = \sqrt{3}$$

21. Calcula la razón pedida en cada caso.

a) $\operatorname{sen}\alpha$, si $\operatorname{tg}\alpha = -3$ y $\alpha \in \text{II}$ **b)** $\operatorname{tg}\alpha$, si $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$ y $\alpha \in \text{IV}$ **c)** $\cos\alpha$, si $\operatorname{cotg}\alpha = 5$ y $\alpha \in \text{III}$

a) Al ser un ángulo del segundo cuadrante, el seno es positivo. Tenemos:

$$1+\operatorname{cotg}^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{cotg}^2\alpha}} = \sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{9}}} = \sqrt{\frac{9}{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

b) Al ser un ángulo del cuarto cuadrante, la tangente es negativa. Tenemos:

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}-1} = -\sqrt{\frac{25}{16}-1} = -\sqrt{\frac{9}{16}} = -\frac{3}{4}$$

c) Al ser un ángulo del tercer cuadrante, el coseno es negativo. Tenemos:

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = -\sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = -\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{25}}} = -\sqrt{\frac{25}{26}} = -\frac{5\sqrt{26}}{26}$$

22 a 24. Ejercicios resueltos.

25. Transforma 15º y $\dfrac{5\pi}{12}$ rad en una suma o diferencia de ángulos y calcula sus razones trigonométricas.

$15º = 60° - 45°$:

$$\operatorname{sen}15º = \operatorname{sen}(60º – 45º) = \operatorname{sen}60º\cos45º - \cos60º\operatorname{sen}45º = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos15º = \cos(60º – 45º) = \cos60º\cos45º + \operatorname{sen}60º\operatorname{sen}45º = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\operatorname{tg}15º = \operatorname{tg}(60º – 45º) = \frac{\operatorname{tg}60º - \operatorname{tg}45º}{1+\operatorname{tg}60º\operatorname{tg}45º} = \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}-4}{2} = 2-\sqrt{3}$$

$\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{6}$:

$$\operatorname{sen}\frac{5\pi}{12} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{4}\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos\frac{5\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}} = 2+\sqrt{3}$$

26. Calcula tg 75º a partir del seno y del coseno.

$75º = 45º + 30º$:

$$\operatorname{sen}75º = \operatorname{sen}(45º+30º) = \operatorname{sen}45º\cos30º + \cos45º\operatorname{sen}30º = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos75º = \cos(45º+30º) = \cos45º\cos30º - \operatorname{sen}45º\operatorname{sen}30º = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\operatorname{tg}75º = \frac{\operatorname{sen}75º}{\cos75º} = \frac{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} = 2+\sqrt{3}$$

27. Demuestra que $\operatorname{sen}\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)=-\cos\alpha$.

$$\operatorname{sen}\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)=\operatorname{sen}\alpha\cos\frac{3\pi}{2}+\cos\alpha\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}=\operatorname{sen}\alpha\cdot 0+\cos\alpha\cdot(-1)=-\cos\alpha$$

28 y 29. Ejercicios resueltos.

30. Determina el valor del seno, el coseno y la tangente de los ángulos 120º y $\frac{4\pi}{3}$ rad.

$$\operatorname{sen}120º=\operatorname{sen}(2\cdot 60º)=2\operatorname{sen}60º\cos 60º=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120º=\cos(2\cdot 60º)=\cos^2 60º-\operatorname{sen}^2 60º=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=-\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg}120º=\operatorname{tg}(2\cdot 60º)=\frac{2\operatorname{tg}60º}{1-\operatorname{tg}^2 60º}=\frac{2\sqrt{3}}{1-\left(\sqrt{3}\right)^2}=-\sqrt{3}$$

$$\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}=\operatorname{sen}\left(2\cdot\frac{2\pi}{3}\right)=2\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\cos\frac{2\pi}{3}=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{4\pi}{3}=\cos\left(2\cdot\frac{2\pi}{3}\right)=\cos^2\frac{2\pi}{3}-\operatorname{sen}^2\frac{2\pi}{3}=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=-\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{4\pi}{3}=\operatorname{tg}\left(2\cdot\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{2\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{2\pi}{3}}=\frac{-2\sqrt{3}}{1-\left(-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{3}$$

31. Desarrolla las expresiones de cos 3α y de tg 3α en función de las razones trigonométricas del ángulo α.

$$\cos 3\alpha=\cos(\alpha+2\alpha)=\cos\alpha\cos 2\alpha-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}2\alpha=\cos\alpha\left(\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha\right)-\operatorname{sen}\alpha\cdot 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha=$$

$$=\cos^3\alpha-\cos\alpha\operatorname{sen}^2\alpha-2\operatorname{sen}^2\alpha\cos\alpha=\cos^3\alpha-3\cos\alpha\operatorname{sen}^2\alpha=\cos^3\alpha-3\cos\alpha(1-\cos^2\alpha)=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$$

$$\operatorname{tg}3\alpha=\operatorname{tg}(\alpha+2\alpha)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}2\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}2\alpha}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha+2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}}{\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha-2\operatorname{tg}^2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{\operatorname{tg}\alpha\left(3-\operatorname{tg}^2\alpha\right)}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}$$

32. Si α es un ángulo del segundo cuadrante y sen $\alpha=\frac{3}{5}$, calcula las razones de $\frac{\alpha}{2}$.

El ángulo $\frac{\alpha}{2}$ es del primer cuadrante, por tanto sus razones trigonométricas son positivas. Tenemos:

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{3}{5}\Rightarrow\cos\alpha=-\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{9}{25}}=-\frac{4}{5}$$

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{4}{5}}{2}}=\sqrt{\frac{9}{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{2}}=\sqrt{\frac{1}{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\sqrt{\frac{1+\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}}}=\sqrt{9}=3$$

33. Calcula sen 32º suponiendo que sen 8º = 0,14.

$$\text{sen}\,8^\circ = 0{,}14 \Rightarrow \cos 8^\circ = \sqrt{1-\text{sen}^2 8^\circ} = \sqrt{1-0{,}14^2} = 0{,}99$$

$$\text{sen}\,16^\circ = \text{sen}(2\cdot 8^\circ) = 2\text{sen}\,8^\circ\cos 8^\circ = 2\cdot 0{,}14\cdot 0{,}99 = 0{,}2772 \Rightarrow \cos 16^\circ = \sqrt{1-\text{sen}^2 16^\circ} = 0{,}9608$$

$$\text{sen}\,32^\circ = \text{sen}(2\cdot 16^\circ) = 2\text{sen}\,16^\circ\cos 16^\circ = 2\cdot 0{,}2772\cdot 0{,}9608 \simeq 0{,}5327$$

34 y 35. Ejercicios resueltos.

36. Transforma en productos.

a) sen 55º + sen 15º **b)** sen 75º – sen 35º **c)** cos 125º + cos 85º **d)** cos 220º – cos 20º

a) $\text{sen}\,55^\circ + \text{sen}\,15^\circ = 2\,\text{sen}\dfrac{55^\circ+15^\circ}{2}\cos\dfrac{55^\circ-15^\circ}{2} = 2\,\text{sen}\,35^\circ\cos 20^\circ$

b) $\text{sen}\,75^\circ - \text{sen}\,35^\circ = 2\cos\dfrac{75^\circ+35^\circ}{2}\text{sen}\dfrac{75^\circ-35^\circ}{2} = 2\cos 55^\circ\,\text{sen}\,20^\circ$

c) $\cos 125^\circ + \cos 85^\circ = 2\cos\dfrac{125^\circ+85^\circ}{2}\cos\dfrac{125^\circ-85^\circ}{2} = 2\cos 105^\circ\cos 20^\circ$

d) $\cos 220^\circ - \cos 20^\circ = -2\,\text{sen}\dfrac{220^\circ+20^\circ}{2}\text{sen}\dfrac{220^\circ-20^\circ}{2} = -2\,\text{sen}\,120^\circ\,\text{sen}\,100^\circ$

37. Expresa en forma de sumas o diferencias.

a) sen 80º sen40º **b)** cos 25º cos 10º

a) $80^\circ = \dfrac{\hat{A}+\hat{B}}{2};\ 40^\circ = \dfrac{\hat{A}-\hat{B}}{2} \Rightarrow \hat{A} = 120^\circ;\ \hat{B} = 40^\circ$

$$\text{sen}\,80^\circ\,\text{sen}\,40^\circ = \frac{1}{2}\cdot 2\text{sen}\frac{120^\circ+40^\circ}{2}\text{sen}\frac{120^\circ-40^\circ}{2} = -\frac{1}{2}\left(\cos 120^\circ - \cos 40^\circ\right)$$

b) $25^\circ = \dfrac{\hat{A}+\hat{B}}{2};\ 10^\circ = \dfrac{\hat{A}-\hat{B}}{2} \Rightarrow \hat{A} = 35^\circ;\ \hat{B} = 15^\circ$

$$\cos 25^\circ\cos 10^\circ = \frac{1}{2}\cdot 2\cos\frac{35^\circ+15^\circ}{2}\cos\frac{35^\circ-15^\circ}{2} = \frac{1}{2}\left(\cos 35^\circ + \cos 15^\circ\right)$$

38. Comprueba que cos 75º + cos 45º = cos 15º.

$$\cos 75^\circ + \cos 45^\circ = 2\cos\frac{75^\circ+45^\circ}{2}\cos\frac{75^\circ-45^\circ}{2} = 2\cos 60^\circ\cos 15^\circ = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos 15^\circ = \cos 15^\circ$$

39. Simplifica la siguiente expresión: $\dfrac{\cos 2x + \cos x}{\text{sen}\,2x + \text{sen}\,x}$

$$\frac{\cos 2x + \cos x}{\text{sen}\,2x + \text{sen}\,x} = \frac{2\cos\dfrac{2x+x}{2}\cos\dfrac{2x-x}{2}}{2\,\text{sen}\dfrac{2x+x}{2}\cos\dfrac{2x-x}{2}} = \frac{\cos\dfrac{3x}{2}}{\text{sen}\dfrac{3x}{2}} = \text{cotg}\frac{3x}{2}$$

40. Calcula el valor de: $\cos\dfrac{\pi}{6} + \cos\dfrac{\pi}{12} - 2\cos\dfrac{\pi}{24}\cos\dfrac{\pi}{8}$

$$\cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{12} - 2\cos\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{8} = 2\cos\frac{\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{12}}{2} - 2\cos\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{8} = 2\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{24} - 2\cos\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{8} = 0$$

41. Ejercicio interactivo.

42 a 46. Ejercicios resueltos.

47. Resuelve las siguientes ecuaciones y da los resultados en grados y en radianes.

a) $\operatorname{sen} x = 1$ **b)** $2\cos x + 1 = 0$ **c)** $\sqrt{3}\operatorname{tg} x - 1 = 0$

a) El seno de un ángulo vale 1 en 90º, 450º, 810º, etc.

Por tanto $x = 90º + 360ºk$ con $k \in \mathbb{Z}$ o, en radianes, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$.

b) $2\cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 120º + 360º\,k = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \\ x = 240º + 360º\,k = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k \end{cases} \forall k \in \mathbb{Z}$.

c) $\sqrt{3}\operatorname{tg} x - 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = 30º + 180º\,k = \frac{\pi}{6} + \pi k\ \forall k \in \mathbb{Z}$.

48. Resuelve las ecuaciones trigonométricas indicando las soluciones comprendidas en el intervalo [0, 2π].

a) $\operatorname{sen} x + \cos x = 0$ **b)** $\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} x = 0$

a) $\operatorname{sen} x + \cos x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = -\cos x \Rightarrow \operatorname{tg} x = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = 135º = \frac{3\pi}{4} \text{ rad} \\ x = 315º = \frac{7\pi}{4} \text{ rad} \end{cases}$

b) $\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow 2\operatorname{sen} x \cos x - \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x(2\cos x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0º = 0 \text{ rad} \\ x = 180º = \pi \text{ rad} \\ x = 360º = 2\pi \text{ rad} \end{cases} \\ \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 60º = \frac{\pi}{3} \text{ rad} \\ x = 300º = \frac{5\pi}{3} \text{ rad} \end{cases} \end{cases}$

49. Resuelve, dando las soluciones en el intervalo [0, 2π].

a) $\operatorname{sen} 6x - 2\operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 2x = 0$ **b)** $2\operatorname{sen}^2 x + \cos 2x = 4\cos^2 x$

a) $\operatorname{sen}6x - 2\operatorname{sen}4x + \operatorname{sen}2x = 0 \Rightarrow 2\operatorname{sen}\frac{8x}{2}\cos\frac{4x}{2} - 2\operatorname{sen}4x = 0 \Rightarrow 2\operatorname{sen}4x\cos 2x - 2\operatorname{sen}4x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\operatorname{sen}4x(\cos 2x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}4x = 0 \Rightarrow 4x = 0º + 180º\,k \Rightarrow x = 0º + 45º\,k \\ \cos 2x = 1 \Rightarrow 2x = 0º + 360º\,k \Rightarrow x = 0º + 180º\,k \end{cases}$ con $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Y si nos ceñimos al intervalo, $x = 0º$; $x = 45º$; $x = 90º$; $x = 135º$; $x = 180º$; $x = 225º$; $x = 270º$; $x = 315º$; $x = 360º$

b) $2\operatorname{sen}^2 x + \cos 2x = 4\cos^2 x \Rightarrow 2\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 4\cos^2 x \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 4\cos^2 x \Rightarrow 1 = 4\cos^2 x \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow x = 60º$; $x = 120º$; $x = 240º$; $x = 300º$

50. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones en el intervalo [0, 2π].

a) $\begin{cases} \text{tg}(x+y)=\sqrt{3} \\ x+2y=\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \text{sen}\,x-\text{sen}\,y=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \\ \text{sen}\,x+\text{sen}\,y=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \end{cases}$

a) $\begin{cases} \text{tg}(x+y)=\sqrt{3} \\ x+2y=\dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \\ x+2y=\dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi k \\ y=\dfrac{\pi}{6}-\pi k \end{cases} k\in\mathbb{Z}$

La única solución en el intervalo [0, 2π] es $x=\dfrac{\pi}{6},\ y=\dfrac{\pi}{6}$.

b) Haciendo el cambio $u=\text{sen}\,x$, $v=\text{sen}\,y$ tenemos:

$$\begin{cases} u-v=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \\ u+v=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ v=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}\,x=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{sen}\,y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Hay cuatro soluciones en el intervalo [0, 2π]: $x=\dfrac{\pi}{3},\ y=\dfrac{\pi}{6}$; $x=\dfrac{2\pi}{3},\ y=\dfrac{\pi}{6}$; $x=\dfrac{\pi}{3},\ y=\dfrac{5\pi}{6}$ y $x=\dfrac{2\pi}{3},\ y=\dfrac{5\pi}{6}$

51 a 54. Ejercicios resueltos.

55. Calcula la longitud del lado *c* de un triángulo *ABC* sabiendo que *a* = 10 cm, $\hat{A}=45^\circ$ y $\hat{B}=100^\circ$.

Aplicando el teorema del seno:

$$\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}}=\frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}}\Rightarrow c=\frac{a\,\text{sen}\,\hat{C}}{\text{sen}\,\hat{A}}=\frac{10\,\text{sen}\,35^\circ}{\text{sen}\,45^\circ}=8{,}11\ \text{cm}$$

56. Dado un triángulo *ABC* con *a* = 12 cm, *b* = 15 cm y $\hat{C}=35^\circ$.

a) ¿Cuál es la longitud del lado *c*?

b) ¿Cuál es su área?

a) Aplicando el teorema del coseno:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\hat{C}=12^2+15^2-2\cdot12\cdot15\cos35^\circ=74{,}105\Rightarrow c=8{,}61\ \text{cm}$$

b) Área: $A=\dfrac{1}{2}ab\text{sen}\,\hat{C}=\dfrac{1}{2}\cdot12\cdot15\text{sen}\,35^\circ=51{,}62\ \text{cm}^2$

57. Resuelve los siguientes triángulos y calcula sus áreas.

a) $\hat{A}=80º,\ \hat{B}=40º,\ a=8$ dm

b) $\hat{A}=80º,\ a=10$ m, $b=5$ m

c) $a=10$ cm, $b=15$ cm, $c=20$ cm

d) $\hat{A}=75º,\ b=8$ mm, $c=12$ mm

a) $\hat{C}=180º-\hat{A}-\hat{B}=60º$

Aplicando el teorema del seno dos veces:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}}=\frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}}\Rightarrow b=\frac{a\operatorname{sen}\hat{B}}{\operatorname{sen}\hat{A}}=\frac{8\operatorname{sen}40º}{\operatorname{sen}80º}=5,22\ \text{dm}$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}}=\frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}\Rightarrow c=\frac{a\operatorname{sen}\hat{C}}{\operatorname{sen}\hat{A}}=\frac{8\operatorname{sen}60º}{\operatorname{sen}80º}=7,04\ \text{dm}$$

Área: $A=\frac{1}{2}ab\operatorname{sen}\hat{C}=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 5,22\cdot\operatorname{sen}60º=18,1\,\text{dm}^2$

b) Aplicando el teorema del seno:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}}=\frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}}\Rightarrow \operatorname{sen}\hat{B}=\frac{b\operatorname{sen}\hat{A}}{a}=\frac{5\operatorname{sen}80º}{10}\simeq 0,492\Rightarrow \hat{B}=29º\ 29'\ 55,34''$$

(La posibilidad $\hat{B}=150º\ 31'\ 40''$ no es válida)

$\hat{C}=180º-\hat{A}-\hat{B}=70º\ 30'\ 4,66''$

Aplicando el teorema del coseno:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\hat{C}=10^2+5^2-2\cdot 10\cdot 5\cos 70º\ 30'\ 4,66''=91,621\Rightarrow c\simeq 9,57\ \text{m}$$

Área: $A=\frac{1}{2}ab\operatorname{sen}\hat{C}=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 5\cdot\operatorname{sen}70º\ 30'\ 4,66''\simeq 23,57\ \text{m}^2$

c) Aplicando el teorema del coseno dos veces:

$$\cos\hat{A}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{15^2+20^2-10^2}{2\cdot 15\cdot 20}=0,875\Rightarrow \hat{A}=28º\ 57'\ 18''$$

$$\cos\hat{B}=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{10^2+20^2-15^2}{2\cdot 10\cdot 20}=0,6875\Rightarrow \hat{B}=46º\ 34'\ 3''$$

$\hat{C}=180º-\hat{A}-\hat{B}=104º\ 28'\ 39''$

Área: $A=\frac{1}{2}ab\operatorname{sen}\hat{C}=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 15\cdot\operatorname{sen}104º\,28'\,39''=72,62\ \text{cm}^2$

d) Aplicando el teorema del coseno dos veces:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}=8^2+12^2-2\cdot 8\cdot 12\cos 75º=158,307\Rightarrow a=12,58\ \text{mm}$$

$$\cos\hat{B}=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{12,58^2+12^2-8^2}{2\cdot 12,58\cdot 12}=0,789\Rightarrow \hat{B}=37º\ 53'\ 42''$$

$\hat{C}=180º-\hat{A}-\hat{B}=67º\ 6'\ 18''$

Área: $A=\frac{1}{2}bc\operatorname{sen}\hat{A}=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 12\cdot\operatorname{sen}75º=46,36\ \text{mm}^2$

58. Ejercicio interactivo.

59 a 71. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Medida de ángulos

72. Copia y completa las siguientes tablas.

Grados	30º		60º	
Radianes		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$

Grados	210º		240º	
Radianes		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{2}$

Grados		135º		180º
Radianes	$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{6}$	

Grados		315º		360º
Radianes	$\frac{5\pi}{3}$		$\frac{11\pi}{6}$	

Grados	30º	45º	60º	90º
Radianes	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

Grados	210º	225º	240º	270º
Radianes	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$

Grados	120º	135º	150º	180º
Radianes	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

Grados	300º	315º	330º	360º
Radianes	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π

73. Pasa de grados a radianes.

a) 585º **b)** 450º **c)** 76º 52′ 30″ **d)** 382º 30′

a) $585° = \frac{585°\pi}{180°} = \frac{13\pi}{4}$ rad

b) $450° = \frac{450°\pi}{180°} = \frac{5\pi}{2}$ rad

c) $76°52'30'' = \frac{76,875°\pi}{180°} = \frac{41\pi}{96}$ rad

d) $382°30' = \frac{382,5°\pi}{180°} = \frac{17\pi}{8}$ rad

74. Los siguientes ángulos están en radianes, pásalos a grados.

a) $\frac{41\pi}{3}$ rad **b)** 13π rad **c)** $\frac{11\pi}{12}$ rad **d)** 5 rad

a) $\frac{41\pi}{3}\text{ rad} = \frac{41\pi\cdot 180°}{3\pi} = 2460º$

b) $13\pi\text{ rad} = \frac{13\pi\cdot 180°}{\pi} = 2340º$

c) $\frac{11\pi}{12}\text{ rad} = \frac{11\pi\cdot 180°}{12\pi} = 165º$

d) $5\text{ rad} = \frac{5\cdot 180°}{\pi} = 286º\,28'\,44''$

Razones trigonométricas

75. Calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudos de los siguientes triángulos rectángulos.

a) $\hat{A}=90º$, $a=29$ cm, $b=20$ cm **b)** $\hat{B}=90º$, $a=65$ cm, $c=72$ cm

a) $c=\sqrt{29^2-20^2}=\sqrt{441}=21$ cm

$\operatorname{sen}\hat{B}=\frac{b}{a}=\frac{20}{29}$ $\cos\hat{B}=\frac{c}{a}=\frac{21}{29}$ $\operatorname{tg}\hat{B}=\frac{b}{c}=\frac{20}{21}$

$\operatorname{sen}\hat{C}=\frac{c}{a}=\frac{21}{29}$ $\cos\hat{C}=\frac{b}{a}=\frac{20}{29}$ $\operatorname{tg}\hat{C}=\frac{c}{b}=\frac{21}{20}$

b) $b=\sqrt{65^2+72^2}=\sqrt{9409}=97$ cm

$\operatorname{sen}\hat{A}=\frac{a}{b}=\frac{65}{97}$ $\cos\hat{A}=\frac{c}{b}=\frac{72}{97}$ $\operatorname{tg}\hat{A}=\frac{a}{c}=\frac{65}{72}$

$\operatorname{sen}\hat{C}=\frac{c}{b}=\frac{72}{97}$ $\cos\hat{C}=\frac{a}{b}=\frac{65}{97}$ $\operatorname{tg}\hat{C}=\frac{c}{a}=\frac{72}{65}$

76. Indica los siguientes ángulos como suma de un número entero de vueltas completas más el ángulo restante.

a) 2345º **b)** –1500º **c)** $\frac{46\pi}{3}$ rad **d)** $-\frac{52\pi}{7}$ rad

a) 2345º = 6 · 360º + 185º = 6 vueltas + 185º

b) –1500º = –5 · 360º + 300º = –5 vueltas + 300º

c) $\frac{46\pi}{3}$ rad $=7\cdot 2\pi+\frac{4\pi}{3}=7$ vueltas $+\frac{4\pi}{3}$ rad

d) $-\frac{52\pi}{7}$ rad $=-4\cdot 2\pi+\frac{4\pi}{7}=-4$ vueltas $+\frac{4\pi}{7}$ rad

77. Utiliza la calculadora para hallar el valor de las siguientes razones trigonométricas. Aproxima los resultados a las milésimas.

a) sen 36º **c)** cotg 111º **e)** sec 126º 33′

b) tg 331º **d)** sen 25º 40′ **f)** cotg 121º 22′ 45″

a) sen 36º = 0,588 **c)** cotg 111º = –0,384 **e)** sec 126º 33′ = –1,679

b) tg 331º = –0,554 **d)** sen 25º 40′ = 0,433 **f)** cotg 121º 22′ 45″ = –0,610

78. Utiliza la calculadora para hallar el valor de las siguientes razones trigonométricas. Aproxima los resultados a las milésimas. Ten en cuenta que todos los ángulos están dados en radianes.

a) $\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}$ **c)** $\cos\frac{3\pi}{7}$ **e)** $\operatorname{tg}\frac{21\pi}{5}$

b) cosec 2 **d)** sec 3 **f)** cotg 2,75

a) $\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}=0,259$ **c)** $\cos\frac{3\pi}{7}=0,223$ **e)** $\operatorname{tg}\frac{21\pi}{5}=0,727$

b) cosec 2 = 1,100 **d)** sec 3 = –1,010 **f)** cotg 2,75 = –2,422

79. Calcula, de forma exacta, el valor de las siguientes razones trigonométricas.

a) sen 240º **d)** sen 1215º **g)** tg $\frac{7\pi}{3}$ **j)** cotg 225º

b) cos 135º **e)** cosec 330º **h)** sec $\frac{5\pi}{3}$ **k)** sen $\frac{7\pi}{4}$

c) cos(–600º) **f)** tg 300º **i)** sec 120º **l)** tg(–15π)

a) $\text{sen}\,240° = -\text{sen}\,60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos 135° = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\cos(-600°) = \cos 600° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$

d) $\text{sen}\,1215° = \text{sen}\,135° = \text{sen}\,45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $\text{cosec}\,330° = -\text{cosec}\,30° = -2$

f) $\text{tg}\,300° = -\text{tg}\,60° = -\sqrt{3}$

g) $\text{tg}\frac{7\pi}{3} = \text{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

h) $\sec\frac{5\pi}{3} = \sec\frac{\pi}{3} = 2$

i) $\sec 120° = -\sec 60° = -2$

j) $\text{cotg}\,225° = \text{cotg}\,45° = 1$

k) $\text{sen}\frac{7\pi}{4} = -\text{sen}\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

l) $\text{tg}(-15\pi) = -\text{tg}\,15\pi = -\text{tg}\,\pi = 0$

80. Calcula todas las razones trigonométricas del ángulo α sabiendo que:

a) Es un ángulo del primer cuadrante y $\cos\alpha = \frac{2}{3}$

b) Pertenece al segundo cuadrante y $\text{sen}\,\alpha = 0{,}25$

c) $180° < \alpha < 270°$ y $\text{tg}\,\alpha = \sqrt{2}$

d) $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ y $\sec\alpha = \sqrt{2}$

e) $90° < \alpha < 180°$ y $\text{cotg}\,\alpha = -3$

f) $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ y $\text{cosec}\,\alpha = -\frac{5}{2}$

a) Al ser un ángulo del primer cuadrante, todas las razones son positivas. Tenemos:

$$\cos\alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow \sec\alpha = \frac{3}{2}$$

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \text{cosec}\,\alpha = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \text{cotg}\,\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

b) Al ser un ángulo del segundo cuadrante, el seno y la cosecante son positivos y el resto de razones son negativas. Tenemos:

$$\operatorname{sen}\alpha = 0,25 = \frac{1}{4} \Rightarrow \operatorname{cosec}\alpha = 4$$

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = -\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{1}{16}} = -\frac{\sqrt{15}}{4} \Rightarrow \sec\alpha = -\frac{4}{\sqrt{15}} = -\frac{4\sqrt{15}}{15}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{1}{\sqrt{15}} = -\frac{\sqrt{15}}{15} \Rightarrow \operatorname{cotg}\alpha = -\sqrt{15}$$

c) Al ser un ángulo del tercer cuadrante, la tangente y la cotangente son positivos, y el resto de razones, negativas. Tenemos:

$$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2} \Rightarrow \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha \Rightarrow \sec\alpha = -\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = -\sqrt{1+2} = -\sqrt{3} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \cos\alpha\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \operatorname{cosec}\alpha = -\frac{3}{\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

d) Al ser un ángulo del cuarto cuadrante, el coseno y la secante son positivos, y el resto de razones, negativas. Tenemos:

$$\sec\alpha = \sqrt{2} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \operatorname{cosec}\alpha = -\sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = -1 \Rightarrow \operatorname{cotg}\alpha = -1$$

e) Al ser un ángulo del segundo cuadrante, el seno y la cosecante son positivos y el resto de razones son negativas. Tenemos:

$$\operatorname{cotg}\alpha = -3 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{3}$$

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha \Rightarrow \sec\alpha = -\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = -\sqrt{1+\frac{1}{9}} = -\frac{\sqrt{10}}{3} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}} = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \cos\alpha\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10} \Rightarrow \operatorname{cosec}\alpha = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

f) Al ser un ángulo del tercer cuadrante, la tangente y la cotangente son positivos, y el resto de razones, negativas. Tenemos:

$$\operatorname{cosec}\alpha = -\frac{5}{2} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = -\frac{2}{5}$$

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = -\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{4}{25}} = -\frac{\sqrt{21}}{5} \Rightarrow \sec\alpha = -\frac{5}{\sqrt{21}} = -\frac{5\sqrt{21}}{21}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2}{\sqrt{21}} = \frac{2\sqrt{21}}{21} \Rightarrow \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\sqrt{21}}{2}$$

81. Calcula, en función de *h*, el valor de cada una de las siguientes razones trigonométricas.

a) sen 123º, siendo sen 57º = *h*.
b) cos 220º, siendo tg 40º = *h*.
c) tg 260º, siendo sen 80º = *h*.
d) cos 250º, siendo sen 110º = *h*.
e) cos 247º, siendo sen 113º = *h*.
f) cosec 701º, siendo cotg 199º = *h*.
g) tg 290º, siendo sen 110º = *h*.
h) sen 83º, siendo cos 7º = *h*.
i) sec 203º, siendo cotg 67º = *h*.

a) $\text{sen}\,123° = \text{sen}\,57° = h$

b) $1 + \text{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos 220° = -\sqrt{\dfrac{1}{1+\text{tg}^2\,220°}} = -\sqrt{\dfrac{1}{1+\text{tg}^2\,40°}} - \sqrt{\dfrac{1}{1+h^2}}$

c) $1 + \text{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} = \dfrac{1}{1-\text{sen}^2\alpha} \Rightarrow \text{tg}\,260° = \sqrt{\dfrac{1}{1-\text{sen}^2\,260°} - 1} = \sqrt{\dfrac{1}{1-(-\text{sen}\,80°)^2} - 1} = \sqrt{\dfrac{1}{1-h^2} - 1} =$

$= \sqrt{\dfrac{h^2}{1-h^2}} = \dfrac{h}{\sqrt{1-h^2}}$

d) $\cos 250° = \cos 110° = -\sqrt{1-\text{sen}^2\,110°} = -\sqrt{1-h^2}$

e) $\cos 247° = -\sqrt{1-\text{sen}^2\,247°} = -\sqrt{1-(-\text{sen}\,113°)^2} = -\sqrt{1-h^2}$

f) $\text{cosec}\,701° = \text{cosec}\,341° = -\text{cosec}\,19° = \text{cosec}\,199° = -\sqrt{1+\text{cotg}^2 199°} = -\sqrt{1+h^2}$

g) $\text{tg}\,290° = \text{tg}\,110° = \sqrt{\dfrac{1}{1-\text{sen}^2\,110°} - 1} = \sqrt{\dfrac{1}{1-h^2} - 1} = \sqrt{\dfrac{h^2}{1-h^2}} = \dfrac{h}{\sqrt{1-h^2}}$

h) $\text{sen}\,83° = \cos 7° = h$

i) $\sec 203° = -\sec 23° = \dfrac{-1}{\cos 23°} = \dfrac{-1}{\text{sen}\,67°} = -\text{cosec}\,67° = -\sqrt{1+\text{cotg}^2\,67°} = -\sqrt{1+h^2}$

82. Determina la razón trigonométrica que se indica en cada caso, expresándola en función de *h*.

a) $\text{cosec}\dfrac{23\pi}{5}$, sabiendo que $\text{cotg}\dfrac{3\pi}{5} = -h^2$.

b) $\sec 305°$, sabiendo que $\text{cotg}\,55° = \dfrac{1}{h}$.

c) tg 348º, sabiendo que cos 192º $= -h^2$.

a) $\text{cosec}\dfrac{23\pi}{5} = \text{cosec}\dfrac{3\pi}{5} = \sqrt{1+\text{cotg}^2\dfrac{3\pi}{5}} = \sqrt{1+h^4}$

b) $\sec 305° = \dfrac{1}{\cos 305°} = \dfrac{1}{\cos 55°} = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{1+\text{tg}^2\,55°}}} = \sqrt{1+\text{tg}^2\,55°} = \sqrt{1+h^2}$

c) $\text{tg}\,348° = -\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2 348°} - 1} = -\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2 12°} - 1} = -\sqrt{\dfrac{1}{(-\cos 192°)^2} - 1} = -\sqrt{\dfrac{1}{h^4} - 1} = -\dfrac{\sqrt{1-h^4}}{h^2}$

83. Sabiendo que sen α = *h* y que α es un ángulo del primer cuadrante, calcula en función de *h*:

a) sen (90º − α)
b) tg (1080º − α)

a) 90º − α es también un ángulo del primer cuadrante $\Rightarrow$ sen (90º − α) = cos α = $\sqrt{1-h^2}$

b) 1080º = 3 · 360º $\Rightarrow$ tg (1080º − α) = tg (−α) = − tg α = $\dfrac{-h}{\sqrt{1-h^2}}$

84. Para un ángulo α del primer cuadrante, que cumple que tg $\alpha = h$, calcula en función de h:

a) sen (90º – α) **b)** cotg (1080º – α)

a) $\text{sen}\,(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha = \sqrt{\dfrac{1}{1+tg^2\alpha}} = \sqrt{\dfrac{1}{1+h^2}}$

b) $\text{cotg}\,(1080^\circ - \alpha) = \text{cotg}\,(-\alpha) = -\text{cotg}\,\alpha = -\dfrac{1}{h}$

85. Sabiendo que cosec $x = -\dfrac{7}{4}$, calcula:

a) sen (810º – x) **b)** $\sec\left(\dfrac{17\pi}{2} - x\right)$

Observemos que x está en el tercer o cuarto cuadrante, por tanto, 810º – x y $\dfrac{17\pi}{2} - x$ están en el segundo o tercer cuadrante, por lo que no se puede saber el signo de cos x.

a) $\text{sen}(810^\circ - x) = \text{sen}(90^\circ - x) = \cos x = \pm\sqrt{1-\text{sen}^2 x} = \pm\sqrt{1-\dfrac{1}{\text{cosec}^2 x}} = \pm\dfrac{\sqrt{33}}{7}$

b) $\sec\left(\dfrac{17\pi}{2} - x\right) = \sec\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \dfrac{1}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)} = \dfrac{1}{\text{sen}\,x} = \text{cosec}\,x = -\dfrac{7}{4}$

86. Demuestra que tg (270º – x) = cotg x.

tg (270º – x) = tg (180º + 90º – x) = tg (90º – x)= cotg x.

87. Desarrolla, en función de sen α y cos α, las expresiones de sen 4α, cos 4α y tg 4α.

$$\text{sen}\,4\alpha = \text{sen}(2\cdot 2\alpha) = 2\,\text{sen}\,2\alpha\cos 2\alpha = 2\cdot 2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha\cdot\left(\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha\right) = 4\,\text{sen}\,\alpha\cos^3\alpha - 4\,\text{sen}^3\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 4\alpha = \cos(2\cdot 2\alpha) = \cos^2 2\alpha - \text{sen}^2 2\alpha = \left(\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha\right)^2 - (2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha)^2 = \cos^4\alpha + \text{sen}^4\alpha - 6\,\text{sen}^2\alpha\cos^2\alpha$$

$$\text{tg}\,4\alpha = \frac{\text{sen}\,4\alpha}{\cos 4\alpha} = \frac{4\,\text{sen}\,\alpha\cos^3\alpha - 4\,\text{sen}^3\alpha\cos\alpha}{\cos^4\alpha + \text{sen}^4\alpha - 6\,\text{sen}^2\alpha\cos^2\alpha}$$

88. Si $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ y $\pi < \beta < \dfrac{3\pi}{2}$ y, siendo $\text{sen}\,\alpha = 0{,}4$ y $\cos\beta = -0{,}5$, calcula:

a) $\text{sen}(\alpha - \beta)$ **b)** $\cos(\alpha + \beta)$ **c)** $\text{tg}(\alpha + \beta)$

$\cos\alpha = -\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha} = -0{,}917$ y $\text{sen}\,\beta = -\sqrt{1-\cos^2\beta} = -0{,}866$

a) $\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta - \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta = -0{,}4\cdot 0{,}5 - 0{,}917\cdot 0{,}866 = -0{,}994$

b) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta = 0{,}917\cdot 0{,}5 + 0{,}4\cdot 0{,}866 = 0{,}805$

c) $\text{tg}(\alpha + \beta) = \dfrac{\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta}{1 - \text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\,\beta} = \dfrac{-\dfrac{0{,}4}{0{,}917} + \dfrac{0{,}866}{0{,}5}}{1 + \dfrac{0{,}4}{0{,}917}\cdot\dfrac{0{,}866}{0{,}5}} = 0{,}738$

89. Sabiendo que tg $\alpha = 3$, calcula las razones trigonométricas del ángulo 2α si α es un ángulo:

a) Del primer cuadrante

b) Del tercer cuadrante

a) Al ser tg α >1, 45º < α < 90º y por tanto, 2α pertenece al segundo cuadrante. Tenemos:

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{1+\text{tg}^2\alpha}} = \sqrt{\frac{1}{1+9}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} \qquad \text{sen}\,\alpha = \text{tg}\,\alpha\cos\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\text{sen}\,2\alpha = 2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha = 2\cdot\frac{3\sqrt{10}}{10}\cdot\frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha = \frac{1}{10} - \frac{9}{10} = -\frac{8}{10} = -\frac{4}{5} = -0{,}8$$

$$\text{tg}\,2\alpha = \frac{\text{sen}\,2\alpha}{\cos 2\alpha} = -\frac{3}{4} = -0{,}75$$

b) Al ser tg α >1, 225º < α < 270º y, por tanto, 2α pertenece al segundo cuadrante y se obtienen los mismos valores del apartado anterior para las razones de 2α.

90. Calcula el valor de la tangente de α, sabiendo que es un ángulo del primer cuadrante y que $\text{sen}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$.

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1-\text{sen}^2\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{8}}{3} \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = \text{tg}\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\text{sen}\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{2\,\text{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\text{sen}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{8}}{3}}{\frac{8}{9}-\frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{8}}{7}$$

91. Calcula, de forma exacta, las razones trigonométricas de los siguientes ángulos.

a) 15º

b) 7º 30′

a) $$\text{sen}\,15^\circ = \text{sen}\left(\frac{30^\circ}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

$$\cos 15^\circ = \cos\left(\frac{30^\circ}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

$$\text{tg}\,15^\circ = \frac{\text{sen}\,15^\circ}{\cos 15^\circ} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}} = 2-\sqrt{3}$$

b) $$\text{sen}\,7^\circ 30' = \text{sen}\left(\frac{15^\circ}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos 15^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}$$

$$\cos 7^\circ 30' = \cos\left(\frac{15^\circ}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos 15^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}$$

$$\text{tg}\,7^\circ 30' = \frac{\text{sen}\,7^\circ\,15'}{\cos 7^\circ\,15'} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} = \sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2}{\left(2+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\left(2-\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)}} = \frac{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

92. Si $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$ y 90º < α < 180º, calcula las razones trigonométricas de $\frac{\alpha}{2}$.

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{2}{3}}{2}}=\sqrt{\frac{5}{6}}=\frac{\sqrt{30}}{6} \qquad \cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{2}{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\frac{\sqrt{30}}{6}}{\frac{\sqrt{6}}{6}}=\sqrt{5}$$

93. Transforma en producto las siguientes sumas de razones trigonométricas.

a) sen 48º + sen 32º **c)** $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}+\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}$ **e)** cos 23º – cos 57º

b) cos 200º + cos 40º **d)** sen 105º – sen 25º **f)** $\cos\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{9}$

a) $\operatorname{sen}48^\circ+\operatorname{sen}32^\circ=2\operatorname{sen}\frac{48^\circ+32^\circ}{2}\cos\frac{48^\circ-32^\circ}{2}=2\operatorname{sen}40^\circ\cos 8^\circ$

b) $\cos 200^\circ+\cos 40^\circ=2\cos\frac{200^\circ+40^\circ}{2}\cos\frac{200^\circ-40^\circ}{2}=2\cos 120^\circ\cos 80^\circ$

c) $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}+\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}=2\operatorname{sen}\frac{\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{5}}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{5}}{2}=2\operatorname{sen}\frac{4\pi}{15}\cos\frac{\pi}{15}$

d) $\operatorname{sen}105^\circ-\operatorname{sen}25^\circ=2\cos\frac{105^\circ+25^\circ}{2}\operatorname{sen}\frac{105^\circ-25^\circ}{2}=2\cos 65^\circ\operatorname{sen}40^\circ$

e) $\cos 23^\circ-\cos 57^\circ=-2\operatorname{sen}\frac{23^\circ+57^\circ}{2}\operatorname{sen}\frac{23^\circ-57^\circ}{2}=-2\operatorname{sen}40^\circ\operatorname{sen}(-17^\circ)=2\operatorname{sen}40^\circ\operatorname{sen}17^\circ$

f) $\cos\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{9}=-2\operatorname{sen}\frac{\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{9}}{2}\operatorname{sen}\frac{\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{9}}{2}=-2\operatorname{sen}\frac{2\pi}{9}\operatorname{sen}\frac{\pi}{9}$

94. Transforma en suma los siguientes productos de razones trigonométricas.

a) 2 sen 33º cos 11º **b)** cos 95º cos 38º **c)** sen 50º cos 75º **d)** sen 119º sen 25º

a) $33^\circ=\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2};\ 11^\circ=\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}\Rightarrow\hat{A}=44^\circ;\ \hat{B}=22^\circ$, luego 2 sen 33º cos 11º = sen 44º + sen 22º

b) $95^\circ=\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2};\ 38^\circ=\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}\Rightarrow\hat{A}=133^\circ;\ \hat{B}=57^\circ$, luego cos 95º cos 38º = $\frac{1}{2}(\cos 133^\circ+\cos 57^\circ)$

c) $50^\circ=\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2};\ 75^\circ=\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}\Rightarrow\hat{A}=125^\circ;\ \hat{B}=-25^\circ$, luego:

sen 50º cos 75º = $\frac{1}{2}(\operatorname{sen}125^\circ+\operatorname{sen}(-25^\circ))$ = $\frac{1}{2}(\operatorname{sen}125^\circ-\operatorname{sen}25^\circ)$

d) $119^\circ=\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2};\ 25^\circ=\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}\Rightarrow\hat{A}=144^\circ;\ \hat{B}=94^\circ$, luego sen 119º sen 25º = $-\frac{1}{2}(\cos 144^\circ-\cos 94^\circ)$

95. Expresa las siguientes sumas como productos.

a) sen 4α + sen 2α

b) sen 3α – sen α

c) cos 6α + cos 4α

d) cos 8α – cos 2α

a) $\operatorname{sen}4\alpha+\operatorname{sen}2\alpha=2\operatorname{sen}\frac{4\alpha+2\alpha}{2}\cos\frac{4\alpha-2\alpha}{2}=2\operatorname{sen}3\alpha\cos\alpha$

b) $\operatorname{sen}3\alpha-\operatorname{sen}\alpha=2\cos\frac{3\alpha+\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{3\alpha-\alpha}{2}=2\cos2\alpha\operatorname{sen}\alpha$

c) $\cos6\alpha+\cos4\alpha=2\cos\frac{6\alpha+4\alpha}{2}\cos\frac{6\alpha-4\alpha}{2}=2\cos5\alpha\cos\alpha$

d) $\cos8\alpha-\cos2\alpha=-2\operatorname{sen}\frac{8\alpha+2\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{8\alpha-2\alpha}{2}=-2\operatorname{sen}5\alpha\operatorname{sen}3\alpha$

96. Demuestra que:

a) $\operatorname{cotg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta-1}{\operatorname{cotg}\beta+\operatorname{cotg}\alpha}$

b) $\operatorname{cotg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta+1}{\operatorname{cotg}\beta-\operatorname{cotg}\alpha}$

a) $\operatorname{cotg}(\alpha+\beta)=\frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}=\frac{1}{\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}}=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}=\frac{1-\frac{1}{\operatorname{cotg}\alpha}\cdot\frac{1}{\operatorname{cotg}\beta}}{\frac{1}{\operatorname{cotg}\alpha}+\frac{1}{\operatorname{cotg}\beta}}=\frac{\frac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta-1}{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta}}{\frac{\operatorname{cotg}\beta+\operatorname{cotg}\alpha}{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta}}=\frac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta-1}{\operatorname{cotg}\beta+\operatorname{cotg}\alpha}$

b) $\operatorname{cotg}(\alpha-\beta)=\frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}=\frac{1}{\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}}=\frac{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}=\frac{1+\frac{1}{\operatorname{cotg}\alpha}\cdot\frac{1}{\operatorname{cotg}\beta}}{\frac{1}{\operatorname{cotg}\alpha}-\frac{1}{\operatorname{cotg}\beta}}=\frac{\frac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta+1}{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta}}{\frac{\operatorname{cotg}\beta-\operatorname{cotg}\alpha}{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta}}=\frac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta+1}{\operatorname{cotg}\beta-\operatorname{cotg}\alpha}$

97. Desarrolla las siguientes expresiones.

a) sen $(\alpha+\beta+\gamma)$

b) cos $(\alpha+\beta-\gamma)$

c) sen $(2\alpha+\beta)$

d) cos $(\alpha-2\beta)$

a) $\operatorname{sen}(\alpha+\beta+\gamma)=\operatorname{sen}(\alpha+(\beta+\gamma))=\operatorname{sen}\alpha\cos(\beta+\gamma)+\cos\alpha\operatorname{sen}(\beta+\gamma)=$

$=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta\cos\gamma-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta\operatorname{sen}\gamma=$

$=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta\operatorname{sen}\gamma-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma$

b) $\cos(\alpha+\beta-\gamma)=\cos(\alpha+(\beta-\gamma))=\cos\alpha\cos(\beta-\gamma)-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}(\beta-\gamma)=$

$=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\cos\gamma+\operatorname{sen}\alpha\cos\beta\operatorname{sen}\gamma=$

$=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma+\operatorname{sen}\alpha\cos\beta\operatorname{sen}\gamma-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\cos\gamma$

c) $\operatorname{sen}(2\alpha+\beta)=\operatorname{sen}2\alpha\cos\beta+\cos2\alpha\operatorname{sen}\beta=2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\alpha\operatorname{sen}\beta-\operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{sen}\beta$

d) $\cos(\alpha-2\beta)=\cos\alpha\cos2\beta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}2\beta=\cos\alpha(\cos^2\beta-\operatorname{sen}^2\beta)+2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\cos\beta=$

$=\cos\alpha\cos^2\beta-\cos\alpha\operatorname{sen}^2\beta+2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\cos\beta$

Identidades trigonométricas

98. Demuestra las siguientes identidades trigonométricas.

a) $\dfrac{\text{sen}\,\alpha-\cos\alpha}{\text{tg}\,\alpha-1}=\cos\alpha$ **b)** $\text{tg}^2\,\alpha-\text{sen}^2\,\alpha=\text{tg}^2\,\alpha\,\text{sen}^2\,\alpha$ **c)** $\dfrac{1+\text{cotg}\alpha}{\text{sen}\,\alpha+\cos\alpha}=\text{cosec}\,\alpha$ **d)** $\sec^2\alpha-1=\text{tg}^2\,\alpha$

a) $\dfrac{\text{sen}\,\alpha-\cos\alpha}{\text{tg}\,\alpha-1}=\dfrac{\text{sen}\,\alpha-\cos\alpha}{\dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}-1}=\dfrac{\text{sen}\,\alpha-\cos\alpha}{\dfrac{\text{sen}\,\alpha-\cos\alpha}{\cos\alpha}}=\dfrac{(\text{sen}\,\alpha-\cos\alpha)\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha-\cos\alpha}=\cos\alpha$

b) $\text{tg}^2\,\alpha-\text{sen}^2\,\alpha=\dfrac{\text{sen}^2\,\alpha}{\cos^2\alpha}-\text{sen}^2\,\alpha=\dfrac{\text{sen}^2\,\alpha-\text{sen}^2\,\alpha\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\dfrac{\text{sen}^2\,\alpha\left(1-\cos^2\alpha\right)}{\cos^2\alpha}=\dfrac{\text{sen}^2\,\alpha}{\cos^2\alpha}\text{sen}^2\,\alpha=\text{tg}^2\,\alpha\,\text{sen}^2\,\alpha$

c) $\dfrac{1+\text{cotg}\,\alpha}{\text{sen}\,\alpha+\cos\alpha}=\dfrac{1+\dfrac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}}{\text{sen}\,\alpha+\cos\alpha}=\dfrac{\dfrac{\text{sen}\,\alpha+\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}}{\text{sen}\,\alpha+\cos\alpha}=\dfrac{1}{\text{sen}\,\alpha}=\text{cosec}\,\alpha$

d) $\sec^2\alpha-1=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-1=\dfrac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\dfrac{\text{sen}^2\,\alpha}{\cos^2\alpha}=\text{tg}^2\,\alpha$

99. Demuestra las siguientes igualdades trigonométricas.

a) $\dfrac{\text{tg}\,\alpha}{\cos2\alpha}=\text{tg}\,2\alpha-\text{tg}\,\alpha$

b) $\text{tg}\,\alpha+\text{cotg}\,\alpha=\sec\alpha\,\text{cosec}\,\alpha$

c) $\dfrac{\text{sen}\,2\alpha}{1+\cos2\alpha}=\text{tg}\,\alpha$

d) $\text{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)-\text{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=2\,\text{tg}\,2\alpha$

e) $\text{sen}^2\,\alpha-\text{sen}^2\,\beta=\text{sen}(\alpha+\beta)\,\text{sen}(\alpha-\beta)$

f) $(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\text{sen}\,\alpha+\text{sen}\,\beta)^2=4\,\text{sen}^2\,\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

g) $\dfrac{\text{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)-\text{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)}{2}=\text{tg}\,2\alpha$

h) $\dfrac{1-\cos2\alpha}{2\,\text{sen}\,\alpha}-\dfrac{\text{sen}\,2\alpha}{1+\cos2\alpha}=\text{sen}\,\alpha-\text{tg}\,\alpha$

a) $\text{tg}\,2\alpha-\text{tg}\,\alpha=\dfrac{2\,\text{tg}\,\alpha}{1-\text{tg}^2\,\alpha}-\text{tg}\,\alpha=\text{tg}\,\alpha\left(\dfrac{2}{1-\text{tg}^2\,\alpha}-1\right)=\text{tg}\,\alpha\dfrac{1+\text{tg}^2\,\alpha}{1-\text{tg}^2\,\alpha}=\text{tg}\,\alpha\dfrac{1+\dfrac{\text{sen}^2\,\alpha}{\cos^2\alpha}}{1-\dfrac{\text{sen}^2\,\alpha}{\cos^2\alpha}}=\text{tg}\,\alpha\dfrac{\dfrac{\cos^2\alpha+\text{sen}^2\,\alpha}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{\cos^2\alpha-\text{sen}^2\,\alpha}{\cos^2\alpha}}=\dfrac{\text{tg}\,\alpha}{\cos2\alpha}$

b) $\text{tg}\,\alpha+\text{cotg}\,\alpha=\dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}=\dfrac{\text{sen}^2\,\alpha+\cos^2\alpha}{\text{sen}\,\alpha\cos\alpha}=\dfrac{1}{\text{sen}\,\alpha\cos\alpha}=\sec\alpha\,\text{cosec}\,\alpha$

c) $\dfrac{\text{sen}\,2\alpha}{1+\cos2\alpha}=\dfrac{2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha}{1+\cos^2\alpha-\text{sen}^2\,\alpha}=\dfrac{2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha}=\dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}=\text{tg}\,\alpha$

d) $\text{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)-\text{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=\dfrac{\text{tg}\dfrac{\pi}{4}+\text{tg}\,\alpha}{1-\text{tg}\dfrac{\pi}{4}\text{tg}\,\alpha}-\dfrac{\text{tg}\dfrac{\pi}{4}-\text{tg}\,\alpha}{1+\text{tg}\dfrac{\pi}{4}\text{tg}\,\alpha}=\dfrac{1+\text{tg}\,\alpha}{1-\text{tg}\,\alpha}-\dfrac{1-\text{tg}\,\alpha}{1+\text{tg}\,\alpha}=\dfrac{4\,\text{tg}\,\alpha}{1-\text{tg}^2\,\alpha}=2\,\text{tg}\,2\alpha$

e) $\text{sen}(\alpha+\beta)\,\text{sen}(\alpha-\beta)=(\text{sen}\,\alpha\cos\beta+\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta)(\text{sen}\,\alpha\cos\beta-\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta)=\text{sen}^2\,\alpha\cos^2\beta-\cos^2\alpha\,\text{sen}^2\,\beta=$

$\text{sen}^2\,\alpha\cos^2\beta-(1-\text{sen}^2\,\alpha)\text{sen}^2\,\beta=\text{sen}^2\,\alpha(\cos^2\beta+\text{sen}^2\,\beta)-\text{sen}^2\,\beta=\text{sen}^2\,\alpha-\text{sen}^2\,\beta$

f) $(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\text{sen}\,\alpha+\text{sen}\,\beta)^2=\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta+\text{sen}^2\,\alpha+\text{sen}^2\,\beta+2\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta=$

$=2-2\left(\cos^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\text{sen}^2\,\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)=2-2\left(1-2\,\text{sen}^2\,\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)=4\,\text{sen}^2\,\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

g) La expresión es equivalente a la demostrada en el aparatado d.

h) $\dfrac{1-\cos2\alpha}{2\,\text{sen}\,\alpha}-\dfrac{\text{sen}\,2\alpha}{1+\cos2\alpha}=\dfrac{1-\cos^2\alpha+\text{sen}^2\,\alpha}{2\,\text{sen}\,\alpha}-\dfrac{2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha}{1+\cos^2\alpha-\text{sen}^2\,\alpha}=\dfrac{2\,\text{sen}^2\,\alpha}{2\,\text{sen}\,\alpha}-\dfrac{2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha}=\text{sen}\,\alpha-\text{tg}\,\alpha$

100. Simplifica las expresiones trigonométricas dadas.

a) $(\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha)^2+(\operatorname{sen}\alpha-\cos\alpha)^2$

b) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta(\operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{cotg}\beta)$

c) $\operatorname{sen}2\alpha(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{cotg}\alpha)$

d) $\dfrac{\cos^2\alpha}{1-\cos\alpha}\cdot\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{1-\operatorname{sen}\alpha}+\dfrac{\cos^2\alpha}{1-\operatorname{sen}\alpha}$

e) $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}\cdot\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}-\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$

a) $(\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha)^2+(\operatorname{sen}\alpha-\cos\alpha)^2=\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha+2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha-2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha=2$

b) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta(\operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{cotg}\beta)=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\left(\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}+\dfrac{1}{\operatorname{tg}\beta}\right)=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\dfrac{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta$

c) $\operatorname{sen}2\alpha(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{cotg}\alpha)=2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\left(\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\right)=2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\left(\dfrac{1}{\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha}\right)=2$

d) $\dfrac{\cos^2\alpha}{1-\cos\alpha}\cdot\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{1-\operatorname{sen}\alpha}+\dfrac{\cos^2\alpha}{1-\operatorname{sen}\alpha}=\dfrac{\cos^2\alpha}{1-\operatorname{sen}\alpha}\left(\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{1-\cos\alpha}+1\right)=\dfrac{1-\operatorname{sen}^2\alpha}{1-\operatorname{sen}\alpha}\left(\dfrac{1-\cos^2\alpha}{1-\cos\alpha}+1\right)=$

$=\dfrac{(1-\operatorname{sen}\alpha)(1+\operatorname{sen}\alpha)}{1-\operatorname{sen}\alpha}\left(\dfrac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{1-\cos\alpha}+1\right)=(1+\operatorname{sen}\alpha)(2+\cos\alpha)$

e) $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}\cdot\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}-\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}\cdot\dfrac{1-\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}-\dfrac{1-\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1+\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=$

$=\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}\cdot\dfrac{(\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha)}{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}-\dfrac{\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha}=1-\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha=2\operatorname{sen}^2\alpha$

101. Simplifica las siguientes expresiones utilizando las fórmulas de transformación de sumas en productos.

a) $\dfrac{\operatorname{sen}8\alpha+\operatorname{sen}2\alpha}{2\cos3\alpha}$

b) $\dfrac{\cos\alpha+\cos\beta}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}$

c) $\dfrac{2\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}5\alpha-\operatorname{sen}3\alpha}$

d) $\dfrac{\cos2\alpha+\cos\alpha}{\operatorname{sen}2\alpha+\operatorname{sen}\alpha}$

a) $\dfrac{\operatorname{sen}8\alpha+\operatorname{sen}2\alpha}{2\cos3\alpha}=\dfrac{2\operatorname{sen}5\alpha\cos3\alpha}{2\cos3\alpha}=\operatorname{sen}5\alpha$

b) $\dfrac{\cos\alpha+\cos\beta}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}=\dfrac{2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{2\operatorname{sen}\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}}=\dfrac{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{\alpha+\beta}{2}}$

c) $\dfrac{2\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}5\alpha-\operatorname{sen}3\alpha}=\dfrac{2\operatorname{sen}\alpha}{2\cos4\alpha\operatorname{sen}\alpha}=\dfrac{1}{\cos4\alpha}$

d) $\dfrac{\cos2\alpha+\cos\alpha}{\operatorname{sen}2\alpha+\operatorname{sen}\alpha}=\dfrac{2\cos\dfrac{3\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}{2\operatorname{sen}\dfrac{3\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}=\dfrac{\cos\dfrac{3\alpha}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{3\alpha}{2}}=\operatorname{cotg}\dfrac{3\alpha}{2}$

102. Demuestra que $\cos x=\cos^4\left(\dfrac{x}{2}\right)-\operatorname{sen}^4\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

$$\cos^4\left(\frac{x}{2}\right)-\operatorname{sen}^4\left(\frac{x}{2}\right)=\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^2-\left(\frac{1-\cos x}{2}\right)^2=\frac{1+\cos^2x+2\cos x}{4}-\frac{1+\cos^2x-2\cos x}{4}=\cos x$$

Ecuaciones trigonométricas

103. Con ayuda de la calculadora, halla la medida en grados del ángulo α del primer cuadrante tal que:

a) $\operatorname{sen}\alpha = 0{,}345$ **c)** $\cos\alpha = 0{,}553$ **e)** $\sec\alpha = 0{,}442$

b) $\operatorname{cosec}\alpha = 0{,}3$ **d)** $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}25$ **f)** $\operatorname{cotg}\alpha = 0{,}01$

a) $\operatorname{sen}\alpha = 0{,}345 \Rightarrow \alpha = 20^\circ\ 10'\ 54''$

b) $\operatorname{cosec}\alpha = 0{,}3 \Rightarrow$ No existe ningún ángulo

c) $\cos\alpha = 0{,}553 \Rightarrow \alpha = 56^\circ\ 25'\ 37''$

d) $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}25 \Rightarrow \alpha = 14^\circ\ 2'\ 10''$

e) $\sec\alpha = 0{,}442 \Rightarrow$ No existe ningún ángulo

f) $\operatorname{cotg}\alpha = 0{,}01 \Rightarrow \alpha = 89^\circ\ 25'\ 37''$

104. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas indicando todas sus soluciones en grados.

a) $\operatorname{sen}x = \frac{1}{2}$ **d)** $\operatorname{sen}x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ **g)** $\operatorname{tg}x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **e)** $\cos x = -\frac{1}{2}$ **h)** $\operatorname{sen}x = 0$

c) $\operatorname{tg}x = 1$ **f)** $1 + \cos x = 0$ **i)** $\operatorname{tg}x = 0$

a) $\operatorname{sen}x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 30^\circ + 360^\circ k \\ x = 150^\circ + 360^\circ k \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

f) $1 + \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = -1 \Rightarrow x = 180^\circ + 360^\circ k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

b) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 30^\circ + 360^\circ k \\ x = 330^\circ + 360^\circ k \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

g) $\operatorname{tg}x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 150^\circ + 360^\circ k \\ x = 330^\circ + 360^\circ k \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 150^\circ + 180^\circ k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

c) $\operatorname{tg}x = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 45^\circ + 360^\circ k \\ x = 225^\circ + 360^\circ k \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 45^\circ + 180^\circ k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

d) $\operatorname{sen}x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 225^\circ + 360^\circ k \\ x = 315^\circ + 360^\circ k \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

h) $\operatorname{sen}x = 0 \Rightarrow x = 180^\circ k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

e) $\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 120^\circ + 360^\circ k \\ x = 240^\circ + 360^\circ k \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

i) $\operatorname{tg}x = 0 \Rightarrow x = 180^\circ k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

105. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas indicando todas sus soluciones en radianes.

a) $\operatorname{sen}4x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ **b)** $\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **c)** $\operatorname{tg}3x = -1$ **d)** $\operatorname{sen}\frac{x}{2} = 0$ **e)** $\cos\frac{x}{3} = -\frac{1}{2}$ **f)** $\operatorname{tg}\frac{3x}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

a) $\operatorname{sen}4x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} 4x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k \\ 4x = \frac{5\pi}{3} + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}k \\ x = \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{2}k \end{cases}$

d) $\operatorname{sen}\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = \pi k \Rightarrow x = 2\pi k$

b) $\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ 2x = \frac{7\pi}{4} + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \pi k \\ x = \frac{7\pi}{8} + \pi k \end{cases}$

e) $\cos\frac{x}{3} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \\ \frac{x}{3} = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2\pi + 6\pi k \\ x = 4\pi + 6\pi k \end{cases}$

c) $\operatorname{tg}3x = -1 \Rightarrow \begin{cases} 3x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \\ 3x = \frac{7\pi}{4} + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{3} \\ x = \frac{7\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3} \end{cases}$

f) $\operatorname{tg}\frac{3x}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3x}{4} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \\ \frac{3x}{4} = \frac{11\pi}{6} + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{10\pi}{9} + \frac{8\pi k}{3} \\ x = \frac{22\pi}{9} + \frac{8\pi k}{3} \end{cases}$

106. Halla todas las soluciones de las siguientes ecuaciones trigonométricas.

a) sen $x = \cos x$

b) sen $2x -$ sen $x = 0$

c) sen $x - \sqrt{3}\cos x = 0$

d) sen $x + \cos x = \sqrt{2}$

a) $\operatorname{sen} x = \cos x \Rightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x = 45^\circ + 180^\circ k$

b) $\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow 2\operatorname{sen} x \cos x - \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x(2\cos x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x = 180^\circ k \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 60^\circ + 360^\circ k \\ x = 300^\circ + 360^\circ k \end{cases} \end{cases}$

c) $\operatorname{sen} x - \sqrt{3}\cos x = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \Rightarrow x = 60^\circ + 180^\circ k$

d) $\operatorname{sen} x + \cos x = \sqrt{2} \Rightarrow (\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = 2 \Rightarrow 1 + 2\operatorname{sen} x \cos x = 2 \Rightarrow 2\operatorname{sen} x\cos x = 1 \Rightarrow \operatorname{sen} 2x = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x = 90^\circ + 360^\circ k \Rightarrow x = 45^\circ + 180^\circ k$

Al elevar al cuadrado aparecen soluciones falsas con k impar. La solución es $x = 45^\circ + 360^\circ k$ con $k = 0, 1, 2...$

107. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas en el intervalo [0º, 360º].

a) tg x + cotg $x = 5$

b) tg $2x$ = cotg x

c) $8\cos 2x = 8\cos x - 9$

d) $2\operatorname{sen}^2 x + \cos 2x = 4\cos^2 x$

a) $\operatorname{tg} x + 4\operatorname{cotg} x = 5 \Rightarrow \operatorname{tg} x + \dfrac{4}{\operatorname{tg} x} = 5 \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x + 4 = 5\operatorname{tg} x \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x - 5\operatorname{tg} x + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = 75^\circ\ 57'\ 50'' \\ x = 255^\circ\ 57'\ 50'' \end{cases} \\ \operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 45^\circ \\ x = 225^\circ \end{cases} \end{cases}$

b) $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{cotg} x \Rightarrow \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x} \Rightarrow 2\operatorname{tg}^2 x = 1 - \operatorname{tg}^2 x \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 30^\circ \\ x = 210^\circ \end{cases} \\ \operatorname{tg} x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 150^\circ \\ x = 330^\circ \end{cases} \end{cases}$

c) $8\cos 2x = 8\cos x - 9 \Rightarrow 8\cos^2 x - 8\operatorname{sen}^2 x - 8\cos x + 9 = 0 \Rightarrow 8\cos^2 x - 8 + 8\cos^2 x - 8\cos x + 9 = 0 \Rightarrow$

$16\cos^2 x - 8\cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 75^\circ\ 31'\ 21'' \\ x = 284^\circ\ 28'\ 39'' \end{cases}$

d) $2\operatorname{sen}^2 x + \cos 2x = 4\cos^2 x \Rightarrow 2\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 4\cos^2 x \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 4\cos^2 x \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 = 4\cos^2 x \Rightarrow \cos^2 x = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 60^\circ \\ x = 300^\circ \end{cases} \\ \cos x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 120^\circ \\ x = 240^\circ \end{cases} \end{cases}$

108. Halla, para el intervalo [0, 2π], las soluciones de las siguientes ecuaciones trigonométricas.

a) $\text{sen}^2 x + \text{tg}^2 x = 0$ **b)** $\cos 2x - \text{sen}\, x = \text{sen}\, 2x - \cos x$ **c)** $2\,\text{sen}\, x + \sqrt{3}\,\text{tg}\, x = 0$

a) $\text{sen}^2 x + \text{tg}^2 x = 0 \Rightarrow \text{sen}^2 x\left(1+\dfrac{1}{\cos^2 x}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}^2 x = 0 \Rightarrow \text{sen}\, x = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = \pi,\ x = 2\pi \\ 1+\dfrac{1}{\cos^2 x} = 0 \Rightarrow \text{Sin solución real} \end{cases}$

b) $\cos 2x - \text{sen}\, x = \text{sen}\, 2x - \cos x \Rightarrow \cos 2x + \cos x = \text{sen}\, 2x + \text{sen}\, x \Rightarrow 2\cos\dfrac{3x}{2}\cos\dfrac{x}{2} = 2\,\text{sen}\dfrac{3x}{2}\cos\dfrac{x}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\dfrac{x}{2}\left[\cos\dfrac{3x}{2} - \text{sen}\dfrac{3x}{2}\right] = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos\dfrac{x}{2} = 0 \Rightarrow \dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{x}{2} = \dfrac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \pi,\ x = 3\pi \text{ (No vale pues } 3\pi \notin [0, 2\pi]) \\ \cos\dfrac{3x}{2} - \text{sen}\dfrac{3x}{2} = 0 \Rightarrow \text{tg}\dfrac{3x}{2} = 1 \Rightarrow \dfrac{3x}{2} = \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3x}{2} = \dfrac{5\pi}{4} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6},\ x = \dfrac{5\pi}{6} \end{cases}$

c) $2\,\text{sen}\, x + \sqrt{3}\,\text{tg}\, x = 0 \Rightarrow 2\,\text{sen}\, x + \sqrt{3}\dfrac{\text{sen}\, x}{\cos x} = 0 \Rightarrow \text{sen}\, x\left(2+\dfrac{\sqrt{3}}{\cos x}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}\, x = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = \pi,\ x = 2\pi \\ \cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{5\pi}{6},\ x = \dfrac{7\pi}{6} \end{cases}$

109. Calcula, para las ecuaciones propuestas, las soluciones pertenecientes al intervalo [−π, π].

a) $\cos 3x = 1 + \cos 2x$

b) $\text{sen}\, 3x + \text{sen}\, 6x = 0$

c) $\cos 5x + \cos 3x = \cos x$

d) $\sqrt{3}\cos x + \text{sen}\, x = 2$

a) $\cos 3x = 1 + \cos 2x \Rightarrow \cos(2x + x) = 1 + \cos^2 x - \text{sen}^2 x \Rightarrow \cos 2x \cos x - \text{sen}\, 2x\, \text{senx} = 2\cos^2 x \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^3 x - \text{sen}^2 x\, \text{cosx} - 2\,\text{sen}^2 x\, \text{cosx} = 2\cos^2 x \Rightarrow \cos x\left(\cos^2 x - 3\,\text{sen}^2 x - 2\cos x\right) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos x\left(\cos^2 x - 3 + 3\cos^2 x - 2\cos x\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{\pi}{2},\ x = \dfrac{\pi}{2} \\ 4\cos^2 x - 2\cos x - 3 = 0 \Rightarrow \cos x = -0{,}6514 \Rightarrow x = 2{,}28,\ x = -2{,}28 \end{cases}$

b) $\text{sen}\, 3x + \text{sen}\, 6x = 0 \Rightarrow 2\,\text{sen}\dfrac{9x}{2}\cos\dfrac{3x}{2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}\dfrac{9x}{2} = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = -\dfrac{2\pi}{9},\ x = \dfrac{2\pi}{9} \\ \cos\dfrac{3x}{2} = 0 \Rightarrow x = \pi,\ x = -\dfrac{\pi}{3},\ x = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$

c) $\cos 5x + \cos 3x = \cos x \Rightarrow 2\cos 4x \cos x = \cos x \Rightarrow \cos x\left(2\cos 4x - 1\right) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2},\ x = -\dfrac{\pi}{2} \\ \cos 4x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{5\pi}{12},\ x = \dfrac{\pi}{12},\ x = -\dfrac{\pi}{12},\ x = -\dfrac{5\pi}{12} \end{cases}$

d) $\sqrt{3}\cos x + \text{sen}\, x = 2 \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \dfrac{1}{2}\text{sen}\, x = 1 \Rightarrow \text{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = 1 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6}$

110. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones trigonométricas en el intervalo [0, 360º].

a) $\begin{cases} \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 y = \dfrac{5}{4} \\ \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 y = \dfrac{3}{4} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \cos x + \cos y = 1 \\ x + y = 90^\circ \end{cases}$

c) $\begin{cases} \operatorname{sen} x \cos y = \dfrac{1}{4} \\ \cos x \operatorname{sen} y = \dfrac{1}{4} \end{cases}$

d) $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2 \\ x - y = \pi \end{cases}$

a) $$\begin{cases} \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 y = \dfrac{5}{4} \\ \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 y = \dfrac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}^2 x = 1 \Rightarrow \operatorname{sen} x = \pm 1 \\ \cos^2 y = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \cos y = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 90^\circ,\ y = 45^\circ \\ x = 90^\circ,\ y = 135^\circ \\ x = 90^\circ,\ y = 225^\circ \\ x = 90^\circ,\ y = 315^\circ \\ x = 270^\circ,\ y = 45^\circ \\ x = 270^\circ,\ y = 135^\circ \\ x = 270^\circ,\ y = 225^\circ \\ x = 270^\circ,\ y = 315^\circ \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} \cos x + \cos y = 1 \\ x + y = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = 1 \Rightarrow 2\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{x-y}{2} = 1 \Rightarrow \cos\frac{x-y}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-y}{2} = 45^\circ \Rightarrow x - y = 90^\circ \\ \dfrac{x-y}{2} = 315^\circ \Rightarrow x - y = 630^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 90^\circ \\ x - y = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow x = 90^\circ,\ \ y = 0^\circ$$

c) $$\begin{cases} \operatorname{sen} x \cos y = \dfrac{1}{4} \\ \cos x \operatorname{sen} y = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2}(\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y)) = \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{2}(\operatorname{sen}(x+y) - \operatorname{sen}(x-y)) = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y) = \dfrac{1}{2} \\ \operatorname{sen}(x+y) - \operatorname{sen}(x-y) = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}(x+y) = \dfrac{1}{2} \\ \operatorname{sen}(x-y) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = 30^\circ \\ x - y = 0^\circ \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x + y = 150^\circ \\ x - y = 180^\circ \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x + y = 390^\circ \\ x - y = -180^\circ \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x + y = 510 \\ x - y = -180 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 15^\circ,\ y = 15^\circ \\ x = 75^\circ,\ y = 75^\circ \\ x = 285^\circ,\ y = 105^\circ \\ x = 105^\circ,\ y = 285^\circ \\ x = 165^\circ,\ y = 345^\circ \\ x = 345^\circ,\ y = 165^\circ \end{cases}$$

d) $$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2 \\ x - y = \pi \end{cases} \Rightarrow \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}(x - \pi) = 2 \Rightarrow \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x = 2 \Rightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{4},\ y = \frac{\pi}{4}$$

111. Halla todas las soluciones de la siguiente ecuación: $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x + 4\cos^3 x = 0$

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x + 4\cos^3 x = 0 \Rightarrow 2\operatorname{sen}\frac{4x}{2}\cos\frac{2x}{2} + 4\cos^3 x = 0 \Rightarrow 2\operatorname{sen} 2x \cos x + 4\cos^3 x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cos x\left(\operatorname{sen} 2x + 2\cos^2 x\right) = 0 \Rightarrow\Rightarrow 2\cos x\left(2\operatorname{sen} x \cos x + 2\cos^2 x\right) = 0 \Rightarrow 4\cos^2 x\left(\operatorname{sen} x + \cos x\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 90^\circ + 360^\circ k \\ x = 270^\circ + 360^\circ k \end{cases} \\ \operatorname{sen} x + \cos x = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = 135^\circ + 360^\circ k \\ x = 315^\circ + 360^\circ k \end{cases} \Rightarrow x = 135^\circ + 180^\circ k \end{cases}$$

112. Resuelve este sistema en el intervalo [0, 2π]: $\begin{cases} \text{sen}\,x + \text{sen}\,y = 1 \\ \cos x + \cos y = 1 \end{cases}$

Elevando al cuadrado las ecuaciones y sumando miembro a miembro los resultados:

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x + \text{sen}^2 y + \cos^2 y + 2(\text{sen}\,x\,\text{sen}\,y + \cos x \cos y) = 2 \Rightarrow 1 + 1 + 2\cos(x-y) = 2 \Rightarrow \cos(x-y) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = y + \frac{\pi}{2} \\ y - x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y = x + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Sustituyendo la primera condición en la primera ecuación:

$$\text{sen}\left(y + \frac{\pi}{2}\right) + \text{sen}\,y = 1 \Rightarrow \cos y + \text{sen}\,y = 1 \Rightarrow \sqrt{1 - \text{sen}^2 y} = 1 - \text{sen}\,y \Rightarrow 1 - \text{sen}^2 y = 1 + \text{sen}^2 y - 2\,\text{sen}\,y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\,\text{sen}^2 y - 2\,\text{sen}\,y = 0 \Rightarrow 2\,\text{sen}\,y(\text{sen}\,y - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}\,y = 0 \Rightarrow y = 0,\ x = \frac{\pi}{2} \\ \text{sen}\,y = 1 \Rightarrow y = \frac{\pi}{2},\ x = \pi \text{ (Falsa)} \end{cases}$$

De la misma forma, sustituyendo la segunda condición, se obtiene también la solución $x = 0,\ y = \frac{\pi}{2}$.

Resolución de triángulos

113. Resuelve los siguientes triángulos rectángulos.

a) $\hat{A} = 90°$, $a = 25$ mm, $c = 14$ mm

b) $\hat{B} = 90°$, $a = 28$ cm, $c = 45$ cm

c) $\hat{C} = 90°$, $\hat{A} = 20°$, $a = 12$ dm

d) $\hat{B} = 90°$, $\hat{A} = 15°$, $b = 15$ m

a) $b = \sqrt{25^2 - 14^2} = 20{,}71$ mm $\quad \text{sen}\,\hat{C} = \frac{c}{a} = \frac{14}{25} \Rightarrow \hat{C} = 34°\ 3'\ 21''$ $\quad \hat{B} = 90° - \hat{C} = 55°\ 56'\ 39''$

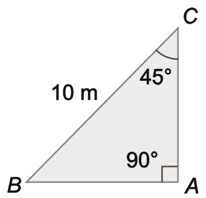
c) $\hat{B} = 90° - \hat{A} = 70°$ $\quad \text{sen}\,\hat{A} = \frac{12}{c} \Rightarrow c = 35{,}09$ dm $\quad \text{tg}\,\hat{A} = \frac{12}{b} \Rightarrow b = 32{,}97$ dm

d) $\hat{C} = 90° - \hat{A} = 75°$ $\quad \text{sen}\,\hat{A} = \frac{a}{15} \Rightarrow a = 3{,}88$ m $\quad \cos\hat{A} = \frac{c}{15} \Rightarrow c = 14{,}49$ m

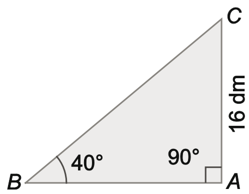
114. Calcula el área de cada uno de estos triángulos rectángulos.

a) $\hat{A} = 90°$, $a = 73$ mm, $c = 55$ mm

b)



c)



a) $b = \sqrt{73^2 - 55^2} = 48 \Rightarrow$ Área: $S = \frac{55 \cdot 48}{2} = 1320$ mm^2

b) $b = c$; $c = 10\,\text{sen}\,45° = 5\sqrt{2}$ m $\Rightarrow$ Área: $S = \frac{5\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2}}{2} = 25$ m^2

c) $c = \frac{16}{\text{tg}\,40°} = 19{,}07$ dm $\Rightarrow$ Área: $S = \frac{19{,}07 \cdot 16}{2} = 152{,}56$ dm^2

115. Resuelve los siguientes triángulos.

a) $b = 20$ cm, $c = 28$ cm, $\hat{C} = 40^o$

b) $a = 41$ cm, $b = 9$ cm, $c = 40$ cm

c) $a = 3$ cm, $\hat{B} = 30^o$, $c = 5$ cm

d) $a = 12$ cm, $b = 15$ cm, $\hat{C} = 35^o$

e) $a = 30$ cm, $\hat{B} = 30^o$, $\hat{C} = 50^o$

f) $b = 25$ cm, $\hat{B} = 55^o$, $\hat{C} = 65^o$

a) $\dfrac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \dfrac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} \Rightarrow \operatorname{sen}\hat{B} = \dfrac{b\operatorname{sen}\hat{C}}{c} = \dfrac{20\cdot\operatorname{sen}40^o}{28} = 0{,}459 \Rightarrow \hat{B} = 27^o 19'\,21''$

$\hat{A} = 180^o - \hat{B} - \hat{C} = 112^o 40' 39''$

$\dfrac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \dfrac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} \Rightarrow a = \dfrac{c\operatorname{sen}\hat{A}}{\operatorname{sen}\hat{C}} = \dfrac{28\cdot\operatorname{sen}112^o 40'' 39''}{\operatorname{sen}40^o} = 40{,}2 \text{ cm}$

b) $\cos\hat{A} = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \dfrac{9^2+40^2-41^2}{2\cdot 9\cdot 40} = 0 \Rightarrow \hat{A} = 90^o$

$\cos\hat{B} = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \dfrac{41^2+40^2-9^2}{2\cdot 40\cdot 41} = 0{,}9756 \Rightarrow \hat{B} = 12^o\ 40'\ 58''$

$\hat{C} = 180^o - \hat{A} - \hat{B} = 77^o\ 19'\ 2''$

c) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B} = 3^2 + 5^2 - 2\cdot 3\cdot 5\cdot\cos 30^o = 8{,}0192 \Rightarrow b = 2{,}83 \text{ cm}$

$\cos\hat{A} = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \dfrac{2{,}83^2+5^2-3^2}{2\cdot 2{,}83\cdot 5} = 0{,}8484 \Rightarrow \hat{A} = 31^o\ 57'\ 43''$

$\hat{C} = 180^o - \hat{A} - \hat{B} = 118^o\ 2'\ 17''$

d) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C} = 12^2 + 15^2 - 2\cdot 12\cdot 15\cdot\cos 35^o = 74{,}1053 \Rightarrow c = 8{,}61 \text{ cm}$

$\cos\hat{A} = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \dfrac{15^2+8{,}61^2-12^2}{2\cdot 15\cdot 8{,}61} = 0{,}6006 \Rightarrow \hat{A} = 53^o\ 5'\ 14''$

$\hat{B} = 180^o - \hat{A} - \hat{C} = 91^o\ 54'\ 46''$

e) $\hat{A} = 180^o - \hat{B} - \hat{C} = 100^o$

$\dfrac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \dfrac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} \Rightarrow c = \dfrac{a\operatorname{sen}\hat{C}}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \dfrac{30\operatorname{sen}50^o}{\operatorname{sen}100^o} = 23{,}34 \text{ cm}$

$\dfrac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \dfrac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} \Rightarrow b = \dfrac{a\operatorname{sen}\hat{B}}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \dfrac{30\operatorname{sen}30^o}{\operatorname{sen}100^o} = 15{,}23 \text{ cm}$

f) $\hat{A} = 180^o - \hat{B} - \hat{C} = 60^o$

$\dfrac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \dfrac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} \Rightarrow c = \dfrac{b\operatorname{sen}\hat{C}}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \dfrac{25\operatorname{sen}65^o}{\operatorname{sen}55^o} = 27{,}66 \text{ cm}$

$\dfrac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \dfrac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} \Rightarrow a = \dfrac{b\operatorname{sen}\hat{A}}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \dfrac{25\operatorname{sen}60^o}{\operatorname{sen}55^o} = 26{,}43 \text{ cm}$

116. Calcula el área de cada uno de estos triángulos.

a) $\hat{A} = 80^\circ$, $b = 25$ cm, $c = 16$ cm

b) $\hat{A} = 70^\circ$, $\hat{B} = 40^\circ$, $c = 20$ cm

c) $a = 16$ cm, $b = 25$ cm, $c = 15$ cm

d) $\hat{A} = 66^\circ$, $a = 15$ cm, $c = 20$ cm

e) $a = 10$ cm, $b = 15$ cm, $\hat{C} = 35^\circ$

a) $A = \frac{1}{2}bc\,\text{sen}\,\hat{A} = 196{,}96\ \text{cm}^2$

b) $\hat{C} = 70^\circ$, por tanto, el triángulo es isósceles y $a = 20$ cm

$A = \frac{1}{2}ac\,\text{sen}\,\hat{B} = 128{,}56\ \text{cm}^2$

c) $\cos\hat{A} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = 0{,}792 \Rightarrow \text{sen}\,\hat{A} = 0{,}6105$

$A = \frac{1}{2}bc\,\text{sen}\,\hat{A} = 114{,}47\ \text{cm}^2$

d) $\dfrac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \dfrac{c}{\text{sen}\,\hat{C}} \Rightarrow \text{sen}\,\hat{C} = \dfrac{c\,\text{sen}\,\hat{A}}{a} = 1{,}218 > 1$

No existe tal triángulo

e) $A = \frac{1}{2}ab\,\text{sen}\,\hat{C} = 43{,}02\ \text{cm}^2$

117. Halla el área de los dos triángulos que verifican que $\hat{A} = 45^\circ$, $a = 6$ cm y $c = 7{,}5$ cm.

$$\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}} \Rightarrow \text{sen}\,\hat{C} = \frac{c\,\text{sen}\,\hat{A}}{a} = 0{,}8839 \Rightarrow \begin{cases} \hat{C} = 62^\circ\ 6'\ 59'',\ \hat{B} = 72^\circ\ 53'\ 1'' \\ \hat{C} = 117^\circ\ 53'\ 1'',\ \hat{B} = 17^\circ\ 6'\ 59'' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2}ac\,\text{sen}\,\hat{B} = 21{,}5\ \text{cm}^2 \\ A = \frac{1}{2}ac\,\text{sen}\,\hat{B} = 6{,}62\ \text{cm}^2 \end{cases}$$

Síntesis

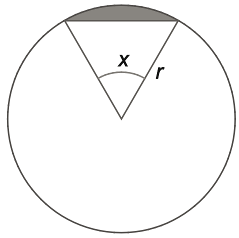
118. Si la suma de dos ángulos α y β es igual, en radianes, a $\frac{\pi}{3}$, calcula el valor de la siguiente expresión:

$$\frac{\cos\alpha + \cos\beta}{\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\beta}$$

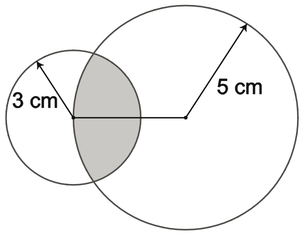
$$\frac{\cos\alpha + \cos\beta}{\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\beta} = \frac{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\,\text{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\text{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}} = \text{cotg}\frac{\alpha+\beta}{2} = \text{cotg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$$

119. a) Demuestra que el área del segmento circular de la figura se puede calcular mediante la expresión:

$$A = \frac{r^2}{2}(x - \text{sen}\, x)$$



b) Calcula el área de la zona sombreada.



a) Área del sector circular: $A_1 = \frac{\pi r^2 x}{360^\circ}$ Área del triángulo: $A_2 = \frac{1}{2} r^2 \text{sen}\, x$

Área del segmento circular: $A = A_1 - A_2 = \frac{\pi r^2 x}{360^\circ} - \frac{1}{2} r^2 \text{sen}\, x = \frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi x}{180^\circ} - \text{sen}\, x\right)$

Considerando los ángulos dados en radianes, la expresión queda: $A = \frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi x}{\pi} - \text{sen}\, x\right) = \frac{r^2}{2}(x - \text{sen}\, x)$

b) Aplicando la expresión anterior para calcular el área de los dos segmentos circulares que se forman en ambas circunferencias.

Área del segmento circular de la circunferencia de radio $r_1 = 5$ cm:

$$\cos \hat{A}_1 = \frac{5^2 + 5^2 - 3^2}{2 \cdot 5 \cdot 5} = 0{,}82 \Rightarrow \hat{A}_1 = 34{,}92^\circ \Rightarrow \alpha_1 = 2\hat{A}_1 = 69{,}84^\circ = 1{,}22 \text{ rad} \Rightarrow \text{A}_1 = \frac{r_1^2}{2}(\alpha_1 - \text{sen}\,\alpha_1) = 3{,}51 \text{ cm}^2$$

Área del segmento circular de la circunferencia de radio $r_2 = 3$ cm:

$$\cos \hat{A}_2 = \frac{3^2 + 5^2 - 5^2}{2 \cdot 3 \cdot 5} = 0{,}3 \Rightarrow \hat{A}_2 = 72{,}54^\circ \Rightarrow \alpha_2 = 2\hat{A}_2 = 145{,}08^\circ = 2{,}53 \text{ rad} \Rightarrow \text{A}_2 = \frac{r_2^2}{2}(\alpha_2 - \text{sen}\,\alpha_2) = 8{,}8 \text{ cm}^2$$

Por tanto, el área de la zona sombreada es $A = A_1 + A_2 = 12{,}31 \text{ cm}^2$.

120. a) Halla una fórmula que permita calcular el área de un rombo conociendo las medidas de su lado y de uno de sus ángulos.

b) ¿Cuál es el área de un rombo de 15 cm de lado si uno de sus ángulos mide 40°?

c) Calcula los ángulos de un rombo sabiendo que su lado mide 4 cm y su área 8 cm^2.

a) Un rombo de lado *x* y uno de sus ángulos α se puede dividir en dos triángulos isósceles iguales de área

$A = \frac{1}{2} x^2 \text{sen}\,\alpha$, por tanto, el área del rombo es $A_R = 2A = x^2 \text{sen}\,\alpha$.

b) $A_R = 15^2 \text{sen}\, 40^\circ = 144{,}63 \text{ cm}^2$.

c) $8 = 4^2 \text{sen}\,\alpha \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow$ Los ángulos del rombo son 30º y 150º.

121. a) Demuestra que $1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

b) Con ayuda de la fórmula anterior y el teorema del coseno, demuestra que en un triángulo de lados *a*, *b* y c se verifica:

$$\cos\frac{\hat{A}}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

con *p* el valor del semiperímetro del triángulo $p = \frac{a+b+c}{2}$.

a) $1+\cos\alpha = 1+\cos^2\frac{\alpha}{2} - \text{sen}^2\frac{\alpha}{2} = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$

b) $2\cos^2\frac{\hat{A}}{2} = 1+\cos\hat{A} = 1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc} = \frac{2p(p-a)}{bc} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\frac{\hat{A}}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$

122. Sabiendo que $\text{tg}\frac{\alpha}{2} = t$:

a) Calcula $\cos^2\frac{\alpha}{2}$ y $\text{sen}^2\frac{\alpha}{2}$ en función de *t*.

b) Con la ayuda de las fórmulas del ángulo doble, calcula $\text{sen}\,\alpha$, $\cos\alpha$ y $\text{tg}\,\alpha$ en función de *t*.

c) Calcula en función de *t* las siguientes expresiones:

i) $\frac{1}{\text{sen}\,\alpha+\cos\alpha}$ **ii)** $\frac{\text{sen}\,\alpha-\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha+\cos\alpha}$ **iii)** $\frac{\text{tg}\,\alpha}{\text{sen}\,\alpha-\cos\alpha}$

a) $1+\text{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \sec^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{1+\text{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{1+t^2}$ y $\text{sen}^2\frac{\alpha}{2} = 1-\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1-\frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}$

b) $\text{sen}\,\alpha = \text{sen}\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right) = 2\,\text{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 2\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{2t}{1+t^2}$

$\cos\alpha = \cos\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right) = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \text{sen}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{1+t^2} - \frac{t^2}{1+t^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2t}{1-t^2}$

c) i) $\frac{1}{\text{sen}\,\alpha+\cos\alpha} = \frac{1}{\frac{2t}{t^2+1}+\frac{1-t^2}{t^2+1}} = \frac{t^2+1}{-t^2+2t+1}$

ii) $\frac{\text{sen}\,\alpha-\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha+\cos\alpha} = \frac{\frac{2t}{t^2+1}-\frac{1-t^2}{t^2+1}}{\frac{2t}{t^2+1}+\frac{1-t^2}{t^2+1}} = \frac{\frac{t^2+2t-1}{t^2+1}}{\frac{-t^2+2t+1}{t^2+1}} = \frac{t^2+2t-1}{-t^2+2t+1}$

iii) $\frac{\text{tg}\,\alpha}{\text{sen}\,\alpha-\cos\alpha} = \frac{\frac{2t}{1-t^2}}{\frac{t^2+2t-1}{t^2+1}} = \frac{2t\left(t^2+1\right)}{\left(1-t^2\right)\left(t^2+2t-1\right)}$

CUESTIONES

123. ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo de sen α, cos α, tg α, cosec α, sec α y cotg α?

El valor mínimo de sen α y cos α es –1 y el valor máximo es 1.

El valor mínimo y máximo del resto de valores no está definido, tg α y cotg α pueden tomar cualquier valor, sec α y cosec α pueden tomar cualquier valor salvo los pertenecientes al intervalo (–1, 1).

124. Indica el número de soluciones de las siguientes ecuaciones trigonométricas.

a) $\text{sen } x + \cos x = 3$

b) $\cos^n x = 10$ siendo n cualquier número natural.

a) No tiene solución, pues el valor máximo del sen x y del cos x es 1, con lo cual su suma nunca puede ser 3.

b) No tiene solución, pues el valor máximo del cos x es 1, con lo cual su potencia nunca puede ser 10.

125. Indica todos los ángulos positivos y menores que 360º tales que su tangente coincida con su cotangente.

La tangente coincide con la cotangente para aquellos ángulos en que su valor es 1 y –1. Luego, los ángulos positivos menores de 360º que satisfacen dicha condición son 45º, 135º, 225º y 315º.

126. ¿Cuánto vale la siguiente diferencia?

$$\textbf{sen}(5\pi - \alpha) - \textbf{cos}(\alpha + 8\pi)$$

$$\text{sen}(5\pi - \alpha) - \cos(\alpha + 8\pi) = \text{sen}\,5\pi \cos\alpha - \cos 5\pi\,\text{sen}\,\alpha - \cos\alpha\cos 8\pi + \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,8\pi =$$

$$= \text{sen}\,\pi\cos\alpha - \cos\pi\,\text{sen}\,\alpha - \cos\alpha\cos 2\pi + \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,2\pi = \text{sen}\,\alpha - \cos\alpha$$

PROBLEMAS

127. Un globo está sujeto a una cuerda de 10 m de longitud. Debido a la acción del viento, el globo se ha desplazado de la vertical del punto de amarre y se encuentra a una altura de 8 m. Calcula la inclinación de la cuerda respecto de la línea de tierra.

Sea α la inclinación buscada, tenemos: $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{8}{10} \Rightarrow \alpha = 53º\ 7'\ 48''$.

128. En cierta ciudad, en el mediodía del solsticio de verano, los rayos solares tienen una inclinación de 73º 3′. Calcula la longitud de la sombra de un edificio de 52 m de altura.

Sea x la longitud de la sombra, tenemos: $\text{tg}\,73º\ 3' = \dfrac{52}{x} \Rightarrow x = 15{,}85$ m.

129. Una señal de tráfico indica que la pendiente de un tramo de carretera es del 8 %, lo que quiere decir que en un desplazamiento horizontal de 100 m se realiza un ascenso de 8 m de altura.

a) ¿Qué ángulo forma la carretera con la horizontal?

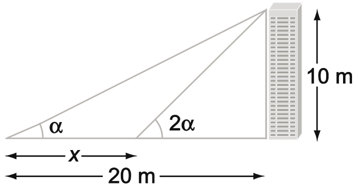
b) ¿Cuántos metros hay que recorrer para ascender 125 m?

a) Sea α el ángulo buscado, tenemos: $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{8}{100} \Rightarrow \alpha = 4º\ 34''\ 26''$

b) Sea x el recorrido pedido, tenemos: $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{125}{x} \Rightarrow x = 1567{,}5$ m

130. Desde un cierto punto que dista 20 m del pie de una torre de 10 m de altura, vemos el punto más alto de ella bajo un cierto ángulo.

¿Qué distancia debemos recorrer hacia la torre para verlo con un ángulo que sea el doble del anterior?



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{10}{20};\quad \operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3} = \frac{10}{20-x} \Rightarrow 4x = 50 \Rightarrow x = 12{,}5 \text{ m}$$

131. Desde un punto del suelo se ve la copa de un pino bajo un ángulo de 42º. Si nos alejamos 2,5 m hacia otro punto del suelo, alineado con el anterior y con el pie del pino, vemos la copa bajo un ángulo de 24º.

Calcula la altura del pino.

Sea h la altura del pino y x la distancia del pie del pino al primer punto. Tenemos:

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{tg}42^\circ = \dfrac{h}{x}\\ \operatorname{tg}24^\circ = \dfrac{h}{2{,}5+x}\end{array}\right\} \Rightarrow h = x\operatorname{tg}42^\circ = 0{,}9x \Rightarrow 0{,}445 = \frac{0{,}9x}{2{,}5+x} \Rightarrow 1{,}1125 + 0{,}445x = 0{,}9x \Rightarrow x = 2{,}45 \text{ m} \Rightarrow h = 2{,}2 \text{ m}$$

132. Dos coches, con velocidades constantes respectivas de 90 y 80 km/h, viajan por una carretera que se bifurca en dos que forman un ángulo de 82º y son rectas. Si llegan a la vez a la bifurcación y cada coche toma una de las ramas, ¿qué distancia habrá entre ellos cuando lleven 15 minutos de viaje?

Sean e_1 y e_2 los espacios recorridos por los dos coches en 15 min = 0,25 h y sea x la distancia buscada, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l}e_1 = 90\cdot 0{,}25 = 22{,}5 \text{ km}\\ e_2 = 80\cdot 0{,}25 = 20 \text{ km}\end{array}\right\} \Rightarrow x = \sqrt{22{,}5^2 + 20^2 - 2\cdot 22{,}5\cdot 20\cos 82^\circ} = 27{,}95 \text{ km}$$

133. Dos coches parten a la vez de un cruce del que salen dos carreteras: una en dirección norte y otra en dirección nornordeste. Uno de los coches toma la primera de ellas con una velocidad de 70 km/h, y el otro la segunda con una velocidad de 90 km/h, ambas constantes.

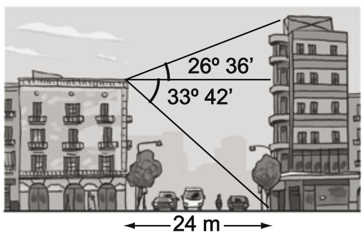
¿A qué distancia se encontrarán al cabo de 30 minutos?

El ángulo que forman las dos carreteras es $\alpha = 22^\circ\ 30'$.

Sean e_1 y e_2 los espacios recorridos por los dos coches en 30 min = 0,5 h y sea x la distancia buscada, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l}e_1 = 70\cdot 0{,}5 = 35 \text{ km}\\ e_2 = 90\cdot 0{,}5 = 45 \text{ km}\end{array}\right\} \Rightarrow x = \sqrt{35^2 + 45^2 - 2\cdot 35\cdot 45\cos\alpha} = 18{,}43 \text{ km}$$

134. Calcula la altura de los dos edificios de la figura.



Sea x la altura del primer edificio e y la del segundo. Tenemos:

$$\operatorname{tg}33^\circ 42' = \frac{x}{24} \Rightarrow x = 24\operatorname{tg}33^\circ 42' = 16 \text{ m}$$

$$\operatorname{tg}26^\circ 36' = \frac{y-x}{24} \Rightarrow y - x = 24\operatorname{tg}26^\circ 36' = 12 \text{ m} \Rightarrow y = 12 + 16 = 28 \text{ m}$$

135. Dos ciudades, *A* y *B*, están situadas sobre el mismo meridiano de la esfera terrestre, mientras que la ciudad *C* se encuentra en el mismo paralelo que *A*. La latitud de *A* es de $\alpha = 40º$ Norte.

a) Si la ciudad *B* está 150 km al norte de *A*, calcula su latitud sabiendo que el radio de la Tierra es de unos 6370 km.

b) Si la ciudad *C* está situada sobre el mismo paralelo, a 30º al oeste de *A*, ¿qué distancia separa estas dos ciudades?

a) Recordemos que la longitud de un arco de amplitud α grados y de una circunferencia de radio *r* es $L = \frac{\pi r \alpha}{180º}$:

$$\alpha + \beta = \frac{180º L}{\pi r} = \frac{180º\left[\frac{\pi \cdot 40º \cdot 6370}{180º} + 150\right]}{6370\pi} = 41º\ 21'$$

b) Se calcula en primer lugar el radio del paralelo correspondiente: $\text{sen}\,50º = \frac{r}{6370} \Rightarrow r = 4879{,}7$ km

$$L = \frac{\pi r \alpha}{180º} = 2555 \text{ km}$$

136. Un avión vuela entre dos ciudades, *A* y *B*, que distan 75 km entre sí. Las visuales desde *A* y *B* hasta el avión forman con la horizontal ángulos de 36º y 12º de amplitud, respectivamente.

Calcula la altura a la que vuela el avión y las distancias a las que se encuentra de *A* y de *B*, suponiendo que el avión y las ciudades están sobre el mismo plano vertical.

Sean x_A, x_B las distancias del avión a *A* y *B*, respectivamente, y *h* la altura del avión, tenemos:

$$\frac{x_B}{\text{sen}\,36º} = \frac{75}{\text{sen}\,132º} \Rightarrow x_B = 59 \text{ km} \qquad \frac{x_A}{\text{sen}\,12º} = \frac{75}{\text{sen}\,132º} \Rightarrow x_A = 21 \text{ km} \qquad h = x_B \cdot \text{sen}\,12º = 12{,}3 \text{ km}$$

137. Calcula el área de un pentágono regular si su perímetro coincide con el de un cuadrado que tiene 144 cm^2 de área.

El lado del cuadrado mide $\sqrt{144} = 12$ cm, por tanto, el perímetro del pentágono es 48 cm, es decir, cada lado del pentágono mide 9,6 cm. Si a_p es la apotema, tenemos $\text{tg}\,36º = \frac{4{,}8}{a_p} \Rightarrow a_p = 6{,}61$ cm y por tanto, el área del pentágono es $\frac{48 \cdot 6{,}61}{2} = 158{,}54$ cm^2.

138. Calcula los radios y las áreas de las circunferencias inscrita y circunscrita a un octógono regular de 5 cm de lado.

Calculamos el radio de la circunferencia circunscrita: $\text{sen}\frac{360º}{16} = \frac{2{,}5}{R} \Rightarrow R = 6{,}53$ cm.

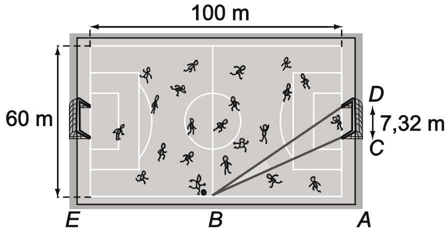
Calculamos el radio de la circunferencia inscrita: $\text{tg}\frac{360º}{16} = \frac{2{,}5}{r} \Rightarrow r = 6{,}04$ cm.

Por tanto, el área de la circunferencia circunscrita es $A_1 = \pi R^2 = 134$ cm^2 y el de la circunferencia inscrita es $A_2 = \pi r^2 = 114$ cm^2.

139. Calcula el área del paralelogramo cuyos lados miden 10 y 15 cm, respectivamente, si uno de sus ángulos mide 35º.

El paralelogramo se puede dividir en dos triángulos iguales de área $\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 15\cdot \text{sen}\,35^\circ$, por tanto, el área del paralelogramo es $10\cdot 15\cdot \text{sen}\,35^\circ = 86{,}04\ \text{cm}^2$.

140. Calcula el ángulo de tiro del jugador que está situado en el punto *B* del campo.



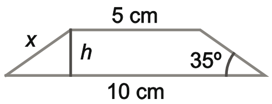
$$\begin{cases} \text{tg}\,\widehat{CBA} = \dfrac{26{,}34}{50} = 0{,}5268 \Rightarrow \widehat{CBA} = 27^\circ\ 46'\ 49'' \\ \text{tg}\,\widehat{DBA} = \dfrac{33{,}66}{50} = 0{,}6732 \Rightarrow \widehat{DBA} = 33^\circ\ 56'\ 54'' \end{cases} \Rightarrow \widehat{DBC} = \widehat{DBA} - \widehat{CBA} = 6^\circ\ 10'\ 5''$$

141. Las bases de un trapecio isósceles miden 10 y 5 cm, respectivamente. El ángulo que forma la base mayor con cada uno de los lados no paralelos es de 35º. Calcula la altura, el perímetro y el área del trapecio.

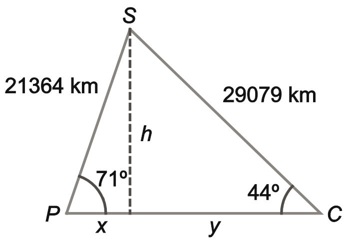
$$\text{tg}\,35^\circ = \frac{h}{2{,}5} \Rightarrow h = 1{,}75\ \text{cm}$$

$$\cos 35^\circ = \frac{2{,}5}{x} \Rightarrow x = 3{,}05\ \text{cm} \Rightarrow P = 21{,}1\ \text{cm}$$

$$A = \frac{(10+5)\cdot 1{,}75}{2} = 13{,}13\ \text{cm}^2$$



142. Desde un satélite GPS se establece la posición de un coche respecto de un punto de referencia fijo en la Tierra. Las distancias desde el punto fijo y el coche al satélite son 21 364 y 29 079 km, respectivamente. Si la línea que une el punto fijo con el satélite forma un ángulo con el suelo de 71º, y la que une el coche con el satélite, 44º, ¿qué distancia separa al coche del punto fijo? ¿A qué altura está el satélite?

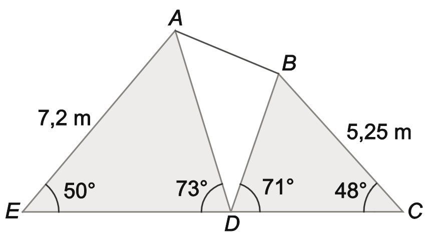


Observemos el dibujo, tenemos:

$$h = 21364\cdot \text{sen}\,71^\circ = 20200\ \text{km}$$

$$x + y = 21364\cdot\cos 71^\circ + 29079\cdot\cos 44^\circ = 27873{,}12\ \text{km}$$

143. Calcula la distancia entre los puntos *A* y *B*.

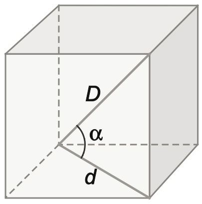


$$\frac{AD}{\text{sen}\,50^\circ} = \frac{7{,}2}{\text{sen}\,73^\circ} \Rightarrow AD = 5{,}77\ \text{m}$$

$$\frac{BD}{\text{sen}\,48^\circ} = \frac{5{,}25}{\text{sen}\,71^\circ} \Rightarrow BD = 4{,}13\ \text{m}$$

$$AB^2 = 5{,}77^2 + 4{,}13^2 - 2{,}\cdot 5{,}77\cdot 4{,}13\cos\left(180^\circ - 73^\circ - 71^\circ\right) = 11{,}79 \Rightarrow AB = 3{,}43\ \text{m}$$

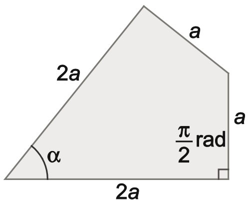
144. Calcula el ángulo α que forman la diagonal del cubo y la diagonal de una cara del mismo.



Sea a la arista del cubo, $D = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$ y $d = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$, por tanto, tenemos:

$$\cos\alpha = \frac{d}{D} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \alpha = 35^\circ\ 15'\ 52''$$

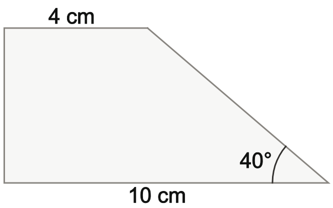
145. Calcula la amplitud del ángulo α de la figura.



La figura se puede dividir en dos triángulos iguales, ya que tienen los tres lados iguales, por tanto:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 26^\circ\ 33'\ 54'' \Rightarrow \alpha = 53^\circ\ 7'\ 48''$$

146. Calcula la altura, el perímetro y el área del trapecio de la figura.



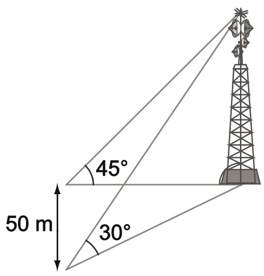
Altura: $h = 6\operatorname{tg} 40^\circ = 5{,}03$ cm

Lado restante: $x = 6\cos 40^\circ = 4{,}6$ cm

Perímetro: 23,63 cm

Área: $\frac{10+4}{2} \cdot 5{,}03 = 35{,}21\ \text{cm}^2$

147. Un hombre que está situado al oeste de una emisora de radio observa que su ángulo de elevación es de 45º. Camina 50 m hacia el sur y observa que el ángulo de elevación es ahora de 30º. Halla la altura de la antena.



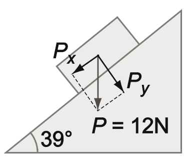
La distancia inicial a la antena es igual a su altura h, ya que el ángulo en el primer punto es de 45º.

Desde el segundo punto, la distancia a la antena es $\frac{h}{\operatorname{tg} 30^\circ} = \sqrt{3}h$.

Al ser el triángulo del suelo rectángulo tenemos:

$$h^2 + 50^2 = \left(\sqrt{3}h\right)^2 = 3h^2 \Rightarrow h^2 = 1250 \Rightarrow h = 35{,}36 \text{ m}$$

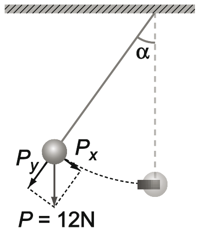
148. Calcula las componentes p_x y p_y de la fuerza $\vec{P}$ de la figura.



$$p_x = P\operatorname{sen}\alpha = 12\operatorname{sen}39^\circ = 7{,}55 \text{ N}$$

$$p_y = P\cos\alpha = 12\cos 39^\circ = 9{,}32 \text{ N}$$

149. Calcula, en función de α, las componentes p_x y p_y de la fuerza $\vec{P}$ en el siguiente péndulo. Halla el valor de la fuerza para el caso en que $\alpha = 30º$.



$$p_x = P \operatorname{sen} \alpha = 12 \operatorname{sen} 30º = 6 \text{ N}$$

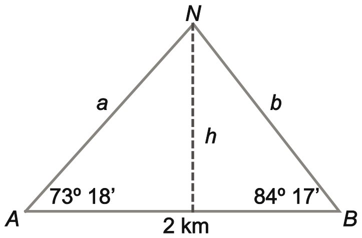
$$p_y = P \cos \alpha = 12 \cos 30º = 10,39 \text{ N}$$

150. Dos personas que están separadas por 2 km de distancia, ven, sobre su plano vertical y en el mismo momento, una nube bajo ángulos de 73º 18′ y 84º 17′, respectivamente.

Calcula la altura de la nube y la distancia de la misma a cada uno de los observadores.

Hay dos posibles interpretaciones del problema.

Si la nube está situada entre los dos observadores, tenemos:

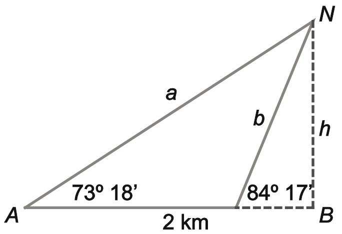


$$\frac{b}{\operatorname{sen} 73º 18'} = \frac{2}{\operatorname{sen} 22º\ 25'} \Rightarrow b = 5,02 \text{ km}$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen} 84º 17'} = \frac{2}{\operatorname{sen} 22º\ 25'} \Rightarrow a = 5,22 \text{ km}$$

$$h = b \operatorname{sen} 84º\ 17' = 5 \text{ km}$$

Si la nube está situada a un mismo lado de los dos observadores, tenemos



$$\frac{b}{\operatorname{sen} 73º\ 18'} = \frac{2}{\operatorname{sen} 10º\ 59'} \Rightarrow b = 10,05 \text{ km}$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen} 95º\ 43'} = \frac{2}{\operatorname{sen} 10º\ 59'} \Rightarrow a = 10,45 \text{ km}$$

$$h = b \operatorname{sen} 84º\ 17' = 10 \text{ km}$$

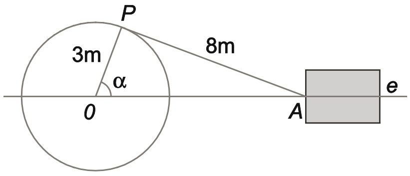
151. Determina, en función del número de lados, las áreas de los polígonos regulares de n lados inscritos y circunscritos, respectivamente, a una circunferencia de 10 cm de radio.

Área del polígono inscrito. $A = n \frac{1}{2} 10^2 \operatorname{sen} \frac{360º}{n} = 50n \operatorname{sen} \frac{360º}{n}$

El lado del polígono circunscrito mide $2 \cdot 10 \cdot \operatorname{tg} \frac{360º}{2n} = 20 \operatorname{tg} \frac{180º}{n}$, por tanto, el área del polígono circunscrito es:

$$A = \frac{n \cdot 20 \operatorname{tg} \frac{180º}{n} \cdot 10}{2} = 100n \operatorname{tg} \frac{180º}{n}$$

152. La máquina que representa la figura transforma un movimiento con trayectoria circular en un movimiento con trayectoria recta.



a) Calcula la distancia que separa a *O* de *A* cuando:

i) $\alpha = 0$ rad **ii)** $\alpha = \pi$ rad **iii)** $\alpha = \frac{\pi}{2}$ rad

b) Halla una expresión que relacione la distancia *OA* con el ángulo α.

c) Comprueba que la relación hallada se corresponde con los valores calculados en el apartado a).

d) Calcula la distancia *OA* cuando:

i) $\alpha = \frac{\pi}{6}$ rad **ii)** $\alpha = \frac{5\pi}{6}$ rad **iii)** $\alpha = \frac{7\pi}{6}$ rad **iv)** $\alpha = \frac{11\pi}{6}$ rad

a) i) $\alpha = 0 \Rightarrow OA = 8 + 3 = 11$ m **ii)** $\alpha = \pi \Rightarrow OA = 8 - 3 = 5$ m **iii)** $\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow OA = \sqrt{8^2 - 3^2} = \sqrt{55} = 7{,}42$ m

b) Aplicando el teorema del coseno tenemos:

$$AP^2 = OA^2 + OP^2 - 2 \cdot OA \cdot OP \cos\alpha \Rightarrow 64 = OA^2 + 9 - 6 \cdot OA\cos\alpha \Rightarrow OA^2 - 6\cos\alpha OA - 55 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow OA = \frac{6\cos\alpha \pm \sqrt{36\cos^2\alpha - 4 \cdot 1 \cdot (-55)}}{2} = 3\cos\alpha \pm \sqrt{9\cos^2\alpha + 55}$$

c) $$\alpha = 0 \Rightarrow OA = 3\cos 0 \pm \sqrt{9\cos^2 0 + 55} = 3 \pm \sqrt{9 + 55} = 3 \pm 8 \Rightarrow \begin{cases} OA = 3 - 8 = -5 \text{ Imposible} \\ OA = 3 + 8 = 11 \text{ m} \end{cases}$$

De igual manera, eliminando las soluciones imposibles tenemos:

$$\alpha = \pi \Rightarrow OA = 3\cos\pi + \sqrt{9\cos^2\pi + 55} = -3 + \sqrt{9 + 55} = -3 + 8 = 5 \text{ m}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow OA = 3\cos\frac{\pi}{2} + \sqrt{9\cos^2\frac{\pi}{2} + 55} = 0 + \sqrt{0 + 55} = \sqrt{55} = 7{,}42 \text{ m}$$

d) Como antes, eliminando las soluciones imposibles, tenemos:

i) $$\alpha = \frac{\pi}{6} \Rightarrow OA = 3\cos\frac{\pi}{6} + \sqrt{9\cos^2\frac{\pi}{6} + 55} = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \sqrt{\frac{27}{4} + 55} = 10{,}46 \text{ m}$$

ii) $$\alpha = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow OA = 3\cos\frac{5\pi}{6} + \sqrt{9\cos^2\frac{5\pi}{6} + 55} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \sqrt{\frac{27}{4} + 55} = 5{,}26 \text{ m}$$

iii) $$\alpha = \frac{7\pi}{6} \Rightarrow OA = 3\cos\frac{7\pi}{6} + \sqrt{9\cos^2\frac{7\pi}{6} + 55} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \sqrt{\frac{27}{4} + 55} = 5{,}26 \text{ m}$$

iv) $$\alpha = \frac{11\pi}{6} \Rightarrow OA = 3\cos\frac{11\pi}{6} + \sqrt{9\cos^2\frac{11\pi}{6} + 55} = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \sqrt{\frac{27}{4} + 55} = 10{,}46 \text{ m}$$

153. a) Demuestra que en cualquier triángulo *ABC*, rectángulo en *A*, se verifica que: $\operatorname{sen} 2\hat{B} = \operatorname{sen} 2\hat{C}$

b) Demuestra que cualquier triángulo *ABC* que verifique la igualdad anterior es isósceles o rectángulo.

a) $$\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ \Rightarrow 2\hat{B} = 180^\circ - 2\hat{C} \Rightarrow \operatorname{sen} 2\hat{B} = \operatorname{sen}(180^\circ - 2\hat{C}) = \operatorname{sen} 2\hat{C}$$

b) $$\operatorname{sen} 2\hat{B} = \operatorname{sen} 2\hat{C} \Rightarrow \begin{cases} 2\hat{B} = 2\hat{C} \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} \Rightarrow \text{ Triángulo isósceles} \\ 2\hat{B} = 180^\circ - 2\hat{C} \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 90^\circ \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ \Rightarrow \text{ Triángulo rectángulo} \end{cases}$$

154. Prueba que si los ángulos de un triángulo verifican que $\cos\hat{A}+\cos\hat{B}=\operatorname{sen}\hat{C}$, entonces el triángulo es rectángulo. ¿Cuál es el ángulo recto?

$$\cos\hat{A}+\cos\hat{B}=\operatorname{sen}\hat{C}\Rightarrow 2\cos\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}\cos\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}=2\operatorname{sen}\frac{\hat{C}}{2}\cos\frac{\hat{C}}{2}\Rightarrow 2\cos\frac{180º-\hat{C}}{2}\cos\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}=2\operatorname{sen}\frac{\hat{C}}{2}\cos\frac{\hat{C}}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cos\left(90º-\frac{\hat{C}}{2}\right)\cos\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}=2\operatorname{sen}\frac{\hat{C}}{2}\cos\frac{\hat{C}}{2}\Rightarrow 2\operatorname{sen}\frac{\hat{C}}{2}\cos\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}=2\operatorname{sen}\frac{\hat{C}}{2}\cos\frac{\hat{C}}{2}\Rightarrow\cos\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}=\cos\frac{\hat{C}}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\hat{A}-\hat{B}}{2}=\dfrac{\hat{C}}{2}\Rightarrow\hat{A}=\hat{B}+\hat{C}=90º\Rightarrow\text{ Triángulo rectángulo en } A\\ \dfrac{\hat{A}-\hat{B}}{2}=-\dfrac{\hat{C}}{2}\Rightarrow\hat{B}=\hat{A}+\hat{C}=90º\Rightarrow\text{ Triángulo rectángulo en } B\end{cases}$$

155. Enunciado Si $\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$ son los tres ángulos de un triángulo cualquiera, calcula el valor de la expresión:

$$\operatorname{cotg}\hat{A}\operatorname{cotg}\hat{B}+\operatorname{cotg}\hat{A}\operatorname{cotg}\hat{C}+\operatorname{cotg}\hat{B}\operatorname{cotg}\hat{C}$$

$$-\operatorname{cotg}\hat{C}=\operatorname{cotg}(180º-\hat{C})=\operatorname{cotg}(\hat{A}+\hat{B})=\frac{1}{\operatorname{tg}(\hat{A}+\hat{B})}=\frac{1-\operatorname{tg}\hat{A}\operatorname{tg}\hat{B}}{\operatorname{tg}\hat{A}+\operatorname{tg}\hat{B}}=\frac{\operatorname{cotg}\hat{A}\operatorname{cotg}\hat{B}-1}{\operatorname{cotg}\hat{A}+\operatorname{cotg}\hat{B}}$$

Por tanto, $\operatorname{cotg}\hat{A}\operatorname{cotg}\hat{B}-1=-\operatorname{cotg}\hat{A}\operatorname{cotg}\hat{C}-\operatorname{cotg}\hat{B}\operatorname{cotg}\hat{C}$ y la expresión vale 1.

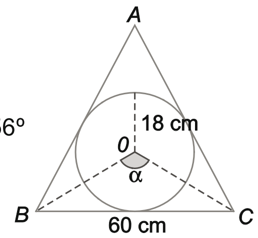
156. El radio de la circunferencia inscrita a un triángulo isósceles mide 18 cm. Resuelve el triángulo sabiendo que su base mide 60 cm.

$OB=\sqrt{18^2+30^2}=35$ cm

Aplicando el teorema del coseno al triángulo *OBC* tenemos:

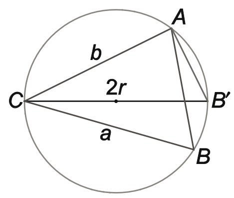
$$\cos\alpha=\frac{35^2+35^2-60^2}{2\cdot 35\cdot 35}=-0{,}4694\Rightarrow\alpha=118º\Rightarrow\hat{B}=\hat{C}=2\cdot 31º=62º\Rightarrow\hat{A}=180º-2\cdot 62º=56º$$

$$\frac{AB}{\operatorname{sen}62º}=\frac{60}{\operatorname{sen}56º}\Rightarrow AB=AC=\frac{60\operatorname{sen}62º}{\operatorname{sen}56º}=63{,}9\text{ cm}$$



PARA PROFUNDIZAR

157. Para el triángulo de la figura y la circunferencia circunscrita a él demuestra la afirmación dada en cada caso.



a) Se cumple la relación: $r=\dfrac{a}{2\operatorname{sen}\hat{A}}=\dfrac{b}{2\operatorname{sen}\hat{B}}=\dfrac{c}{2\operatorname{sen}\hat{C}}$ (Ten en cuenta la relación entre los ángulos $\hat{B}$ y $\hat{B}'$)

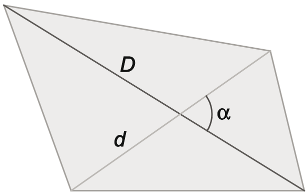
b) El área del triángulo se puede calcular como: $A=\dfrac{abc}{4r}$

a) $\hat{B}=\hat{B}'$, ya que ambos son ángulos inscritos a la misma circunferencia y determinan el mismo arco.

$$\operatorname{sen}\hat{B}=\frac{b\operatorname{sen}\hat{A}}{a}\text{ y }\operatorname{sen}\hat{B}'=\frac{b}{2r}\Rightarrow\frac{b\operatorname{sen}\hat{A}}{a}=\frac{b}{2r}\Rightarrow r=\frac{a}{2\operatorname{sen}\hat{A}}\Rightarrow r=\frac{a}{2\operatorname{sen}\hat{A}}=\frac{b}{2\operatorname{sen}\hat{B}}=\frac{c}{2\operatorname{sen}\hat{C}}$$

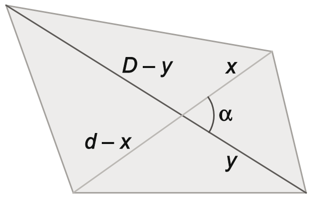
b) $A=\dfrac{1}{2}ab\operatorname{sen}\hat{C}=\dfrac{1}{2}ab\dfrac{c}{2r}=\dfrac{abc}{4r}$

158. Observa la siguiente figura.



a) Si las diagonales de un cuadrilátero miden d y D unidades lineales, respectivamente, y forman un ángulo α, demuestra que el área de dicho cuadrilátero puede calcularse con la fórmula: $A=\frac{1}{2}dD\,\text{sen}\,\alpha$

b) Calcula el área de un cuadrilátero cuyas diagonales forman un ángulo de 80º si miden 4 y 5 cm, respectivamente.

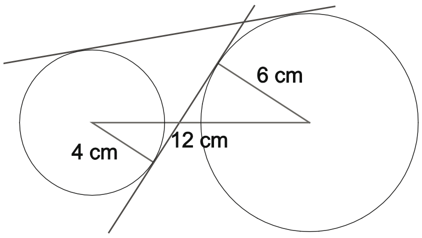


a) El cuadrilátero se puede dividir en cuatro triángulos, como $\text{sen}\,\alpha(180º-\alpha)=\text{sen}\,\alpha$ se puede escribir:

$$A=\frac{1}{2}\text{sen}\,\alpha\left[xy+x(D-y)+y(d-x)+(D-y)(d-x)\right]=\frac{1}{2}dD\,\text{sen}\,\alpha$$

b) $A=\frac{1}{2}Dd\,\text{sen}\,\alpha=\frac{1}{2}4\cdot 5\,\text{sen}\,80º=9{,}85\text{ cm}^2$

159. Considera las dos circunferencias coplanarias de la figura.



Calcula la inclinación sobre la recta que une los centros de:

a) la tangente común exterior.

b) la tangente común interior.

a) $\text{sen}\,\alpha=\frac{6-4}{12}\Rightarrow\alpha=9º\ 35'\ 39''$

b) $\text{sen}\,\beta=\frac{6+4}{12}\Rightarrow\beta=56º\ 26'\ 34''$

ENTORNO MATEMÁTICO

Parada inesperada en el Puente

Un grupo de estudiantes está en Londres aprendiendo inglés. Como actividad complementaria realizan una visita a Westminster. Sin embargo, al ir a cruzar el puente se encuentran con que está cortado por un accidente. Para entretenerse durante la espera, su profesor, Mr. Clever, les propone el siguiente problema:

Can you estimate the height of Big Ben Tower and how far we are from it?

Los chicos están un poco desconcertados porque no saben cómo conseguir la información que les pide Mr. Clever (*internet via Smartphone is not allowed*).

En ese momento Bonneidée, una estudiante francesa, recuerda sus clases de trigonometría y propone un plan para solucionar el problema. Coloca a Edu en el punto *A*, a Fer, en el *B*, y mide en pasos la distancia entre ambos, obteniendo un valor de 125 pasos de unos 80 cm cada uno. Luego estima los ángulos α y β formados por el puente y las líneas que unen *A* y *B* con lo alto del Big Ben, obteniendo que $\alpha = 18º$ y $\beta = 26º$.

Con esta información, Bonneidée afirma que es capaz de calcular la altura de la torre y la distancia a ella. ¿Crees que está en lo cierto o que se está marcando un farol ante sus amigos y Mr. Clever? Si piensas lo primero, demuéstralo calculando tú mismo las cantidades pedidas (*x* y *h* en la figura).

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 26º = \dfrac{h}{x} \\ \operatorname{tg} 18º = \dfrac{h}{100 + x} \end{cases} \Rightarrow h = x \operatorname{tg} 26º = 0,488x \Rightarrow 0,325 = \frac{0,488x}{100+x} \Rightarrow x = 199,39 \text{ m};\ h = 97,3 \text{ m}$$

El *London Eye*

En vista de que el puente no se abre, Mr. Clever propone, ante el espanto del grupo que ya se ve resolviendo otro problemita una alternativa:

Would you like to visit the London Eye?

Aunque a algunos les da miedo montar en la gigantesca noria del milenio, a otros les parece que puede ser excitante y que las vistas y las fotos desde arriba merecerán la pena. Al final deciden caminar junto al Támesis hasta llegar a la famosa noria y allí el grupo se divide entre los osados que suben y los más miedosos: Fer, Clara y, *of course*, Mr. Clever que se quedan esperando abajo.

Cuando han pasado unos minutos, la noria se para de repente por causa de una avería y comienzan a escucharse protestas desde las cestas. Los chicos observan que la cesta en la que van sus compañeros ha quedado en la posición *A*. Para tener ocupados a los chicos mientras se arregla el problema, Mr. Clever sin perder su flema británica comenta:

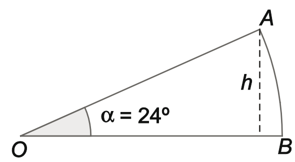
It seems like the London Eye is not working very well today! Hey guys, can you tell your friends what height they are at?

Edu y Clara tratan de resolver el problema. Los únicos datos con que cuentan son los que se indican a la entrada de la misma: altura máxima 135 m y dispone de 30 cestas.

¿Qué deberían hacer estos chicos para estimar la altura a la que chillan sus compañeros?

Observa que el ángulo entre dos cestas, medido desde el centro *O* de la noria, es de 12º, por tanto: $h = 67,5 \operatorname{sen} 24º = 27,5$ m

Luego, la altura a la está la cesta de sus compañeros es $67,5 + 27,5 = 95$ m.



AUTOEVALUACIÓN

Comprueba qué has aprendido

1. Convierte en grados o en radianes, según el caso, los siguientes ángulos.

a) 65º **b)** 138º **c)** 4 rad **d)** $\frac{\pi}{10}$ rad

a) $65^\circ = \frac{65^\circ\pi}{180^\circ} = \frac{13\pi}{36}$ rad

b) $138^\circ = \frac{138^\circ\pi}{180^\circ} = \frac{23\pi}{30}$

c) $4 \text{ rad} = \frac{4\cdot 180^\circ}{\pi} = 229^\circ\ 11'$

d) $\frac{\pi}{10} \text{ rad} = \frac{\pi\cdot 180^\circ}{10\pi} = 18^\circ$

2. Escribe en función de un ángulo entre 0 y 45º las siguientes razones trigonométricas.

a) sen 120º **b)** cos 480º **c)** tg (–430º)

a) $\text{sen}\,120^\circ = \text{sen}(180^\circ - 40^\circ) = \text{sen}\,40^\circ$

b) $\cos 480^\circ = \cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\text{sen}\,30^\circ$

c) $\text{tg}(-430^\circ) = -\text{tg}\,430^\circ = -\text{tg}\,70^\circ = -\text{cotg}\,20^\circ$

3. Calcula la razón pedida en cada caso.

a) $\cos\alpha$, si $\text{tg}\,\alpha = 4$ y $\alpha \in \text{III}$ **b)** $\text{tg}\,\alpha$, si $\text{sen}\,\alpha = -\frac{1}{5}$ y $\alpha \in \text{IV}$

a) $1 + \text{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha \Rightarrow \sec\alpha = -\sqrt{1+\text{tg}^2\alpha} = -\sqrt{1+16} = -\sqrt{17} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{\sqrt{17}}{17}$

b) $1 + \text{cotg}^2\alpha = \text{cosec}^2\alpha \Rightarrow \text{cotg}\,\alpha = -\sqrt{\text{cosec}^2\alpha - 1} = -\sqrt{25-1} = -\sqrt{24} = -2\sqrt{6} \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = -\frac{1}{2\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{12}$

4. Si sen α = 0,6 y sen β = 0,8, siendo ambos ángulos del primer cuadrante, calcula el valor de:

a) sen $(\alpha + \beta)$ **b)** cos $(\alpha - \beta)$ **c)** tg $(\alpha + \beta)$

$\text{sen}\,\alpha = 0{,}6 = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{4}{5}$ y $\text{tg}\,\alpha = \frac{3}{4}$ $\text{sen}\,\beta = 0{,}8 = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos\beta = \frac{3}{5}$ y $\text{tg}\,\beta = \frac{4}{3}$

a) $\text{sen}(\alpha+\beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta = \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5} = 1 \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$

b) $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta = \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5} + \frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5} = \frac{24}{25} = 0{,}96$

c) $\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \text{tg}(\alpha+\beta)$ no existe pues $\cos(\alpha+\beta) = 0$ y $\text{tg}(\alpha+\beta) = \frac{1}{0}$

5. Si α es un ángulo del segundo cuadrante y $\cos\alpha = -\frac{3}{4}$, calcula las razones de $\frac{\alpha}{2}$ y de 2α.

Al ser α un ángulo del segundo cuadrante, el seno es positivo, la tangente negativa y $\frac{\alpha}{2}$ pertenece al primer cuadrante. Tenemos $\cos\alpha = -\frac{3}{4} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$ y $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{7}}{3}$ y, por tanto:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{7}{8}} = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{14}}{4} \qquad \operatorname{cosec}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{4}{\sqrt{14}} = \frac{2\sqrt{14}}{7}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \qquad \sec\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \sqrt{7} \qquad \operatorname{cotg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$$

Por otra parte:

$$\operatorname{sen}2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = -\frac{3\sqrt{7}}{8} \qquad \operatorname{cosec}2\alpha - \frac{8}{3\sqrt{7}} = -\frac{8\sqrt{7}}{21}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = \frac{1}{8} \qquad \sec 2\alpha = 8$$

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = -3\sqrt{7} \qquad \operatorname{cotg}2\alpha = -\frac{1}{3\sqrt{7}} = -\frac{\sqrt{7}}{21}$$

6. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas.

a) $\operatorname{sen}\alpha = 4\cos\alpha$ **b)** $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\operatorname{sen}\alpha}{2}$

a) $\operatorname{sen}\alpha = 4\cos\alpha \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = 4 \Rightarrow \alpha = 75{,}96^\circ + 180^\circ k$

b) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\operatorname{sen}\alpha}{2} \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{\operatorname{sen}\alpha}{2} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0^\circ + 180^\circ k \\ \cos\alpha = -2 \Rightarrow \text{ No tiene solución real} \end{cases}$

7. Encuentra todas las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones trigonométricas.

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\alpha + \cos\beta = 1 \\ \cos\alpha - \operatorname{sen}\beta = -1 \end{cases}$$

Elevando al cuadrado las ecuaciones y sumando miembro a miembro los resultados:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\beta + 2(\operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta) = 2 \Rightarrow 1+1+2\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = 2 \Rightarrow \operatorname{sen}(\alpha-\beta) = 0 \Rightarrow \alpha = \beta$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha = 1 \Rightarrow (\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 \Rightarrow 1 + 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = 1 \Rightarrow 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0^\circ + 180^\circ k \text{ (Falsa)} \\ \cos\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 90^\circ + 180^\circ k \end{cases}$$

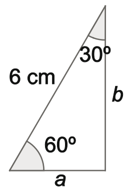
8. Resuelve y calcula el área del triángulo con las medidas: $\hat{A}=70°$, $\hat{B}=30°$ y $b=12$ cm

$\hat{C}=180°-\hat{A}-\hat{B}=80°$

$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}}=\frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}}\Rightarrow a=\frac{b\operatorname{sen}\hat{A}}{\operatorname{sen}\hat{B}}=\frac{12\operatorname{sen}70°}{\operatorname{sen}30°}=22{,}55$ cm $\qquad \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}=\frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}}\Rightarrow c=\frac{b\operatorname{sen}\hat{C}}{\operatorname{sen}\hat{B}}=\frac{12\operatorname{sen}80°}{\operatorname{sen}30°}=23{,}63$ cm

Área: $A=\frac{1}{2}ac\operatorname{sen}\hat{B}=133{,}21\text{ cm}^2$

9. Los lados de un rombo miden 6 cm y forman entre sí ángulos de 60º y 120º. Halla las longitudes de las diagonales del rombo.



El rombo se divide en cuatro triángulos rectángulos como el de la figura.

$a=6\operatorname{sen}30°=3$ cm $\qquad b=6\cos 30°=3\sqrt{3}$ cm

Por tanto, la diagonal mayor del rombo mide $2b=6\sqrt{3}$ cm y la diagonal menor mide $2a=6$ cm.

10. Los ángulos interiores de un polígono regular tienen por coseno $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

a) Encuentra el número de lados que tiene dicho polígono.

b) ¿Hay más de una solución a la pregunta a)?

Existen dos ángulos cuyo coseno es igual a $\frac{-\sqrt{3}}{2}$, $\alpha=150°$ y $\alpha=210°$ (>180º) este último no es interior pues los interiores son menores de 180º. Aplicamos la fórmula para calcular la medida de los ángulos interiores de un polígono regular de n lados:

$$\alpha=\frac{180°(n-2)}{n}\Rightarrow 150°=\frac{180°(n-2)}{n}\Rightarrow 150°n=180°n-360°\Rightarrow n=12$$

Por tanto hay una única solución, $n=12$ lados.

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada caso

1. Un triángulo tiene por lados: $a=uv$, $b=\frac{u^2-v^2}{2}$ y $c=\frac{u^2+v^2}{2}$ con u y v dos números reales positivos tales que $u>v$.

A. Se trata de un triángulo rectángulo en *A*.

B. Se trata de un triángulo rectángulo en *B*.

c) Se trata de un triángulo rectángulo en *C*.

d) No es un triángulo rectángulo.

Se verifica que $c^2=a^2+b^2$, por tanto la respuesta correcta es C.

2. Dada la función $\frac{5}{5-4\cos 5\alpha}$, el valor mínimo se obtiene cuando:

A. $\alpha=2k\pi$ rad con $k\in\mathbb{Z}$

B. $\alpha=\frac{\pi}{5}+\frac{2}{5}k\pi$ rad con $k\in\mathbb{Z}$

C. $\alpha=\pi+2k\pi$ rad con $k\in\mathbb{Z}$

D. $\alpha=\frac{\pi}{5}+2k\pi$ rad con $k\in\mathbb{Z}$

Como $5-4\cos 5\alpha>0$ el valor mínimo de la función se alcanza cuando $\cos 5\alpha$ es mínimo, es decir, cuando $\cos 5\alpha=-1$, por tanto, la respuesta correcta es B.

3. **Uno de los siguientes casos de resolución de triángulos tiene dos soluciones diferentes. Indica cuál es.**

A. $a = 4$ cm, $b = 6$ cm, $c = 15$ cm

B. $a = 5$ cm, $b = 10$ cm, $\hat{A} = 20º$

C. $a = 5$ cm, $b = 10$ cm, $\hat{C} = 20º$

D. $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $c = 5$ cm

La respuesta correcta es B.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

4. **La ecuación trigonométrica $\text{sen}^2\, x = \cos^2 x$ tiene:**

A. Una solución en $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

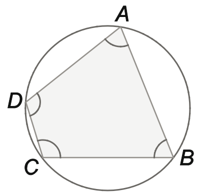
B. Dos soluciones en $[0, \pi]$

C. Tres soluciones en $\left[0, \dfrac{3\pi}{2}\right]$

D. Cuatro soluciones en $[0, 2\pi]$

$\text{sen}^2 x = \cos^2 x \Rightarrow \text{tg}^2 x = 1 \Rightarrow \text{tg}\, x = \pm 1 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ x = \dfrac{3\pi}{4} + \pi k$, por tanto, todas las respuestas son correctas.

5. **En la siguiente figura:**



A. $\hat{A} + \hat{D} = 180º$ **B.** $\hat{A} + \hat{C} = 180º$ **C.** $\hat{B} + \hat{D} = 180º$ **D.** $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360º$

B es correcto, pues la medida de un ángulo inscrito es igual a la mitad de la medida angular del arco que abarca. Si el ángulo inscrito $\hat{A}$ abarca un arco x, el ángulo inscrito $\hat{C}$ abarca un arco de 360º – x, y $\hat{A} + \hat{C} = \dfrac{x}{2} + \dfrac{360º - x}{2} = 180º$. C es correcto por el mismo razonamiento y D es correcto porque se deduce de los dos casos anteriores.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas

6. **Tres puntos del plano, no alineados, determinan un triángulo. Se consideran las siguientes afirmaciones:**

1. El triángulo es isósceles

2. El triángulo tiene dos ángulos cuyos senos son iguales.

A. $1 \Leftrightarrow 2$

B. $1 \Rightarrow 2$ pero $2 \not\Rightarrow 1$

C. $2 \Rightarrow 1$ pero $1 \not\Rightarrow 2$

D. 1 y 2 son excluyentes entre sí

B es correcta, si un triángulo es isósceles, va a tener dos ángulos iguales y por tanto con el mismo seno, pero si un triángulo tiene dos ángulos con el mismo seno, puede ser isósceles (y por tanto también equilátero).

Señala el dato innecesario para contestar

7. **Para calcular la tangente del ángulo $\dfrac{\alpha}{2}$ se dan los siguientes datos:**

1. $\mathbf{tg}\,\alpha > 0$ **2.** $\mathbf{cos}\,\alpha < 0$ **3.** $1 + \mathbf{sen}^2\,\alpha = 1{,}64$

A. Puede eliminarse el dato 1.

B. Puede eliminarse el dato 2.

C. Puede eliminarse el dato 3.

D. Hacen falta los tres datos.

1 y 2 no bastan para calcular $\text{tg}\dfrac{\alpha}{2}$, por lo que 3 es necesario.

$1 + \text{sen}^2\alpha = 1{,}64 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha = 0{,}64 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \text{sen}^2\alpha = 0{,}36 \Rightarrow \cos\alpha = \pm 0{,}6$ y $\text{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

También es necesario 2 para conocer el signo del coseno. Además, si $\cos\alpha < 0$, α pertenece al segundo o tercer cuadrante, por lo que $\dfrac{\alpha}{2}$ puede pertenecer al primer o segundo cuadrante y no queda determinado el signo de $\text{tg}\dfrac{\alpha}{2}$, así que necesitamos también 1 para concluir que α pertenece al tercer cuadrante y por tanto $\dfrac{\alpha}{2}$ pertenece al segundo y su tangente es negativa. La respuesta correcta es D.